



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Math 3629.02.5



SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1843.)

um  
ang  
dan  
lag  
Die  
der  
die  
rich  
eig  
bek  
wir  
nik  
Rec

rt

tlich  
nzel-  
und-  
den.  
für  
ern,  
ter-  
lern  
ium,  
abei  
ech-  
asse

Ausführliche Prospekte durch jede Buchhandlung oder direkt von  
Göschen'schen Verlagshandlung in Leipzig.

## Verzeichnis

der erschienenen und projektierten Bände der

### „Sammlung Schubert“.

Erschienen sind bis Oktober 1902:

- Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Mk. 2.80.
- „ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pfieger in Münster i. E. Mk. 4.80.
- „ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.—.
- „ IV: **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.40.
- „ V: **Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Mk. 3.60.
- „ VI: **Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Mk. 4.40.
- „ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Mk. 5.—.
- „ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 6.—.
- „ IX: **Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.—.
- „ X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg. Mk. 9.—.
- „ XII: **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Mk. 5.—.
- „ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. Mk. 8.—.
- „ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. Mk. 5.20.
- „ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Mk. 8.—.
- „ XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Grossmann in Wien. Mk. 5.—.

- Band XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil:**  
**Die Flächen zweiten Grades** von Prof.  
 Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.40.
- „ XXVII: **Geometrische Transformationen I. Teil:**  
**Die projektiven Transformationen nebst**  
**ihren Anwendungen** von Privatdozent Dr.  
 Karl Doehlemann in München. Mk. 10.—.
- „ XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und**  
**ihre Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt  
 in Strassburg. Mk. 8.50.
- „ XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil**  
 von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.  
 Mk. 12.—.
- „ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die**  
**linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute  
 in Groningen. Mk. 10.—.
- „ XL: **Mathematische Optik** von Dr. J. Classen in  
 Hamburg. Mk. 6.—.
- „ XLVI: **Thetafunktionen und hyperelliptische Funk-**  
**tionen** v. Oberlehrer E. Landfriedt in Strassburg.  
 Mk. 4.50.

**In Vorbereitung bzw. projektiert sind:**

**Integralrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.  
**Elemente der Astronomie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.  
**Mathematische Geographie** von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.  
**Anwendungen der darstellenden Geometrie** von Dr.  
 John Schröder in Hamburg.  
**Geschichte der Mathematik** von Prof. Dr. A. v. Braunmühl  
 und Prof. Dr. S. Günther in München.  
**Dynamik** von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.  
**Technische Mechanik** von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.  
**Geodäsie.**  
**Allgemeine Funktionentheorie** von Dr. Paul Epstein in  
 Strassburg.  
**Räumliche projektive Geometrie.**  
**Theorie der höheren algebraischen Kurven.**  
**Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven I**  
 von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl  
 Kommerell in Gmünd.  
**Elliptische Funktionen** von Dr. Paul Epstein in Strassburg.  
**Theorie u. Praxis d. Reihen** v. Prof. C. Runge in Hannover.  
**Invariantentheorie** von Dr. Jos. Wellstein in Strassburg.  
**Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven II**  
 von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell  
 in Gmünd.  
**Kinematik** von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.  
**Potentialtheorie** von Oberlehrer Grimsehl in Hamburg.  
**Mechanische Wärmelehre** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen.  
**Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I und II**  
 von Dr. J. Classen in Hamburg.

Theorie  
der  
algebraischen Funktionen  
und ihrer Integrale

von

**E. Landfriedt**

Oberlehrer am Technikum in Strassburg i. E.

---

Mit 36 Figuren

---

Leipzig  
G. J. Göschensche Verlagshandlung  
1902

3629.02.5  
Math ~~3609.02.7~~  
✓



Haven fund.

**Alle Rechte  
von der Verlagshandlung vorbehalten.**

---

# Inhaltsverzeichnis.

## Kapitel I: Die algebraische Grundgleichung $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$ .

|   | Seite |
|---|-------|
| § 1. Allgemeines . . . . .  | 1     |
| § 2. Die algebraischen Funktionen; Definition und Grundeigenschaften . . . . .                      | 3     |
| § 3. Mehrdeutigkeit der algebraischen Funktionen; Verzweigungspunkte und vielfache Punkte . . . . . | 15    |
| § 4. Beispiel mehrdeutiger Funktionen . . . . .   | 22    |
| § 5. Bestimmung der Wurzelkoincidenzen . . . . .  | 30    |
| § 6. Reihenentwicklung der Wurzeln . . . . .  | 40    |
| § 7. Bestimmung der Reihenentwicklungen nach Puiseux . . . . .                                      | 42    |
| § 8. Beispiele zur Puiseux'schen Methode . . . . .  | 51    |
| § 9. Normalisierung der Grundgleichung . . . . .  | 58    |
| § 10. Zahl der Verzweigungspunkte bei nur einfachen Wurzelkoincidenzen . . . . .                    | 64    |

## Kapitel II: Die Riemann'sche Verzweigungsfläche $T$ .

|   |     |
|---|-----|
| § 11. Konstruktion der Fläche $T$ . . . . .   | 67  |
| § 12. Die algebraischen Funktionen der Klasse; ihre Residuen und Ordnungszahlen . . . . . | 83  |
| § 13. Beziehungen zwischen algebraischen Funktionen der Klasse . . . . .                  | 94  |
| § 14. Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen . . . . .                             | 101 |
| § 15. Anwendung des Vorigen auf die Riemann'sche Fläche $T$ . . . . .                     | 110 |
| § 16. Beispiele zum Vorhergehenden . . . . .  | 115 |
| § 17. Normalform von $T$ . . . . .  | 120 |

## Kapitel III: Die Integrale der Klasse.

|   |     |
|---|-----|
| § 18. Das allgemeine Abel'sche Integral . . . . .                 | 129 |
| § 19. Das Integral I. Gattung . . . . .                           | 136 |
| § 20. Die Periodizitätsmoduln der Integrale I. Gattung . . . . .  | 156 |
| § 21. Die $p$ Normalintegrale I. Gattung . . . . .                | 167 |
| § 22. Das Christoffel'sche Integral $P(o, \varepsilon)$ . . . . . | 172 |
| § 23. Das Normalintegral II. Gattung . . . . .                    | 186 |



von diesem Punkte aus in der komplexen Zahlenebene eine stetige Aufeinanderfolge von Werten durchläuft,  $f_1$  sich ebenfalls ändern und eine Reihe von Werten durchlaufen; das Aggregat dieser Wertänderungen heißt ein Zweig der Funktion  $f(z)$ .

Erreicht  $z$ , wenn es in der komplexen Zahlenebene einen Weg  $l$  durchläuft, einen Punkt  $z = \alpha$ , in dem  $k$  der sonst verschiedenen Werte von  $f(z)$  einander gleich werden, so treffen in dem zugehörigen Punkte der  $f$ -Ebene  $k$  Zweige  $f_1 \dots f_k$  von  $f(z)$  zusammen. Geht dann  $z$  vom Punkte  $z = \alpha$  aus weiter, so trennen sich in der  $f$ -Ebene diese  $k$

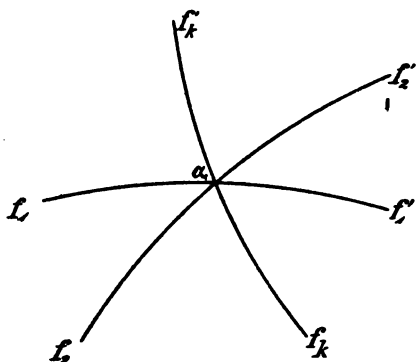


Fig. 1.

Zweige wieder, es bleibt aber im allgemeinen unentschieden, welchervon den Zweigen  $f'_1 \dots f'_k$  (Fig. 1) die Fortsetzung eines bestimmten Zweiges  $f_v$  aus der Reihe  $f_1 \dots f_k$  sei. Einen solchen Punkt  $z = \alpha$  nennen wir einen singulären (oder kritischen) Punkt von  $f(z)$ . Durchläuft  $z$  einen geschlossenen Weg, der einen singulären Punkt um-

schließt, in dem  $k$  Zweige  $f_1 \dots f_k$  von  $f(z)$  zusammentreffen, so beschreiben  $f_1 \dots f_k$  nicht notwendig ebenfalls geschlossene Wege in der  $f$ -Ebene; mit anderen Worten: ein solcher Weg von  $z$  führt  $f(z)$  nicht notwendigerweise zu seinem Anfangswerte zurück. Funktionen, die diese Eigentümlichkeit aufweisen, nennen wir mehrdeutig. Mehrwertige Funktionen sind auch mehrdeutig.

Bei unseren späteren Betrachtungen über algebraische Funktionen wird es eine unserer Hauptaufgaben sein, die Anzahl und Lage der singulären Punkte zu bestimmen. Es wird sich dabei, beiläufig gesagt, herausstellen, daß die Mehrdeutigkeit der algebraischen Funktionen ausschließlich auf dem Auftreten solcher singulären Punkte beruht.

## § 2. Die algebraischen Funktionen: Definition und Grundeigenschaften.

**Definition:** Eine GröÙe  $s$  heiÙt algebraische Funktion der komplexen Variablen  $z$ , wenn sie mit  $z$  verbunden ist durch eine Gleichung von der Form:

$$I^0) \quad F(s, z) = \varphi_0 \cdot s^n + \varphi_1 \cdot s^{n-1} + \dots + \varphi_n = 0,$$

worin die Koeffizienten  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  ganze rationale Funktionen von  $z$  sind, von denen mindestens eine bis zum Grade  $m$  in  $z$  ansteigt.

Die durch die Grundgleichung  $I^0)$  definierte algebraische Funktion  $s$  von  $z$  ist  $n$ -wertig; jedem Werte  $a$  von  $z$  entsprechen  $n$  im allgemeinen verschiedene Werte:

$$s_1(a), s_2(a), \dots, s_n(a)$$

von  $s$ , nämlich die  $n$  Wurzeln der Gleichung:

$$F(s, a) = \varphi_0(a) \cdot s^n + \varphi_1(a) \cdot s^{n-1} + \dots + \varphi_n(a) = 0.$$

Schreibt man für das beliebige  $a$  wieder  $z$ , so sind die  $n$  Wurzeln

$$s_1(z), \dots, s_n(z)$$

die  $n$  Zweige der durch die Grundgleichung  $I^0)$  definierten Funktion  $s(z)$ . Die Untersuchung der Eigenschaften dieser  $n$  Zweigfunktionen bildet die Grundlage der im Folgenden zu entwickelnden Theorie.

Wir betrachten die Wurzeln  $s_1, \dots, s_n$  zunächst in ihrer Abhängigkeit von den Koeffizienten der Grundgleichung  $I^0)$  und schreiben zu dem Zweck diese Gleichung in der Form:

$$II^0) \quad s^n + f_1 \cdot s^{n-1} + \dots + f_\mu \cdot s^{n-\mu} + \dots + f_n = 0,$$

wo 
$$f_\mu(z) = \frac{\varphi_\mu(z)}{\varphi_0(z)} \quad \text{ist, für } \mu = 1, 2, \dots, n.$$

Es gelten folgende Sätze:

**Satz I<sup>0</sup>)** Sind alle Wurzeln  $s_1, \dots, s_n$  endlich, so sind es auch alle Koeffizienten  $f_1, \dots, f_n$ .



**Satz III<sup>0</sup>)** Es giebt Werte von  $z$ , für die mindestens eine der Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  unendlich wird.

Beweis: Als einwertige, rationale Funktion von  $z$  muß  $f_1(z)$  mindestens für einen Wert von  $z$  unendlich werden; gemäß der Beziehung

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = -f_1,$$

muß für ein solches  $z$  auch mindestens eine der Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  unendlich werden.

**Satz IV<sup>0</sup>)** Wird eine Wurzel  $s_\mu$  unendlich, so wird es auch mindestens einer der Koeffizienten.

Beweis: Würde keiner der Koeffizienten  $f_1 \dots f_n$  unendlich, wenn  $s_\mu = \infty$  wird, so müßten nach Satz II<sup>0</sup>) alle Wurzeln  $s_1 \dots s_n$ , also auch  $s_\mu$  endlich sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Folgerung: Von den Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  werden eine oder mehrere immer und nur in den Punkten der  $z$ -Ebene unendlich, in denen einer der Koeffizienten unendlich wird. — Eine algebraische Funktion von  $z$  wird also nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich.

Angenommen,  $s$  werde  $\infty$  für  $z = \alpha$ ; dann muß nach Satz IV<sup>0</sup>) mindestens ein Koeffizient  $f$  für  $z = \alpha$  unendlich werden. Ist  $\nu - 1$  die höchste Ordnung, zu der diese Koeffizienten für  $z = \alpha$  unendlich werden, so ist jedenfalls

$$(z - \alpha)^\nu \cdot f_\mu = 0 \text{ für } z = \alpha. (\mu = 1, 2 \dots n).$$

Führt man nun in die Gleichung

$$s^n + f_1 \cdot s^{n-1} + \dots + f_n = 0$$

an Stelle von  $s$  eine neue Funktion  $S$  ein mit Hilfe der Substitution

$$s = \frac{S}{(z - \alpha)^\nu},$$

so geht diese Gleichung über in die Gleichung:

$$\begin{aligned} S^n + (z - \alpha)^\nu \cdot f_1 \cdot S^{n-1} + (z - \alpha)^{2\nu} \cdot f_2 \cdot S^{n-2} + \dots \\ + (z - \alpha)^{\nu n} \cdot f_n = 0, \end{aligned}$$

die sich für  $z = \alpha$  auf

$$S^* = 0, \text{ oder } S = 0$$

reduziert. Für  $z = \alpha$  verschwindet also das Produkt  $s \cdot (z - \alpha)^v$ , d. h.  $s$  kann für  $z = \alpha$  höchstens  $= \infty^{v-1}$  werden, also jedenfalls  $\infty$  nur zu einer endlichen Ordnung.

Wird  $s = \infty$  für  $z = \infty$ , so führt man an Stelle von  $z$  die neue Variable  $z'$  ein mit Hilfe der Substitution  $z = \frac{1}{z'}$ .

Die Koeffizienten  $f$  sind dann rationale Funktionen von  $z'$ , und es lassen sich  $z' = 0$  dieselben Betrachtungen wiederholen, wie vorhin für  $z = \alpha$ . Auch für  $z = \infty$  kann  $s$  nicht zu unendlich hoher Ordnung  $\infty$  werden. — Wir haben daher den

**Satz V<sup>o</sup>)** Eine algebraische Funktion kann nur zu endlicher Ordnung unendlich werden und nicht unendlich oft.

Wir untersuchen nun, wie die Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  von  $\Pi^0$ ) sich ändern, wenn die Koeffizienten  $f_1 \dots f_n$  sich ändern.

In der  $z$ -Ebene nehmen wir einen Punkt  $z = \alpha$ , dem ein System endlicher Werte von  $f_1 \dots f_n$  entspricht. Die Gleichung  $\Pi^0$ ) habe für dieses Wertesystem der  $f_1 \dots f_n$   $q$  ( $< n$ ) von einander verschiedene Wurzeln

$$s_1 \dots s_q,$$

und zwar sei  $s_1$  eine  $t$ -fache,  $s_2$  eine  $u$ -fache,  $\dots$   $s_q$  eine  $v$ -fache Wurzel, so daß die Gleichung  $\Pi^0$ ) sich für das betrachtete Koeffizientensystem in der Form

$$(s - s_1)^t \cdot (s - s_2)^u \dots (s - s_q)^v = 0$$

anschreiben läßt, wo

$$t + u + \dots + v = n \text{ ist.}$$

Für jede dieser  $q$  Wurzeln  $s_1 \dots s_q$  giebt es, nach Satz  $\Pi^0$ ), eine obere Grenze

$$\text{mod } s < \kappa \cdot M,$$

wo

$$\text{mod } f_\mu \geq n_\mu \cdot M^\mu$$



oder  $\text{mod } \Delta < \sum_{\mu=1}^n \text{mod } \delta f_{\mu} \cdot \text{mod } s'^n - \mu,$

dafs die einschränkende Bedingung  $a^0)$  ganz sicher erfüllt ist, wenn wir verlangen:

$$a_1^0) \quad \sum_{\mu=1}^n \text{mod } \delta f_{\mu} \cdot (xN)^{n-\mu} \geq \varepsilon \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n.$$

Diese Bedingung hinwieder ist erfüllt, wenn jeder der  $n$  Summanden links gleich oder kleiner als der  $n^{\text{te}}$  Teil der Gröfse rechts ist, d. h. wenn

$$a_2^0) \quad \text{mod } \delta f_{\mu} \geq \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{xN}\right)^{n-\mu} \text{ ist, für } \mu = 1, 2 \dots n.$$

In dieser die Schwankungen  $\delta f_{\mu}$  einschränkenden Bedingung, deren Erfülltsein das Erfülltsein von  $a^0)$  nach sich zieht, ist  $N$  noch unbestimmt und nur an die Bedingung

$$\text{mod } (f_{\mu} + \delta f_{\mu}) \geq n_{\mu} \cdot N^{\mu}$$

gebunden. Beachtet man aber, dafs

$$\text{mod } (f_{\mu} + \delta f_{\mu}) < \text{mod } f_{\mu} + \text{mod } \delta f_{\mu},$$

und  $\text{mod } f_{\mu} \geq n_{\mu} \cdot M^{\mu},$

so sieht man, dafs

$$\text{mod } (f_{\mu} + \delta f_{\mu}) < n_{\mu} \cdot M^{\mu} + \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{xN}\right)^{n-\mu}$$

ist, falls  $a_2^0)$  erfüllt. Die Gröfse  $N$  genügt daher der Bedingung

$$\text{mod } (f_{\mu} + \delta f_{\mu}) \geq n_{\mu} N^{\mu},$$

wenn  $n_{\mu} \cdot M^{\mu} + \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{xN}\right)^{n-\mu} \geq n_{\mu} \cdot N^{\mu}$

oder

$$b^0) \quad \varepsilon \geq k_{\mu} \quad (\mu = 1, 2 \dots n)$$

ist, für  $k_{\mu} = n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right) \cdot (x \cdot N)^{n-\mu} \cdot n_{\mu} (N^{\mu} - N^{\mu}).$

Von den  $n$  Gröſsen  $k_\mu$  ist jede gröſser als die nächstfolgende. Es ist nämlich zunächst, da  $\varepsilon > 0$  sein soll,  $N > M$ , d. h.

$\frac{M}{N} = \omega < 1$ . Ferner ist:

$$\frac{k_{\mu+1}}{k_\mu} = \frac{n-\mu}{\kappa} \cdot \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{1-\omega^{\mu+1}}{1-\omega^\mu}.$$

Da  $\kappa = \frac{1}{\sqrt[n]{2-1}} > n$  ist, so ist  $\frac{n-\mu}{\kappa} < 1$ . Ebenso

ist  $\frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{1-\omega^{\mu+1}}{1-\omega^\mu} < 1$ , wie sich aus

$$\frac{1-\omega^{\mu+1}}{1-\omega^\mu} = \frac{1-\omega+\omega(1-\omega^\mu)}{1-\omega^\mu} = \frac{1}{1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{\mu+1}} + \omega < 1 + \omega < 2$$

ergibt. Hieraus folgt  $\frac{k_{\mu+1}}{k_\mu} < 1$ . Von allen  $k_\mu$  ist  $k_n$  am kleinsten. Die  $n$  Bedingungen b<sup>o</sup>) lassen sich also ersetzen durch die eine Bedingung:

$$c^o) \quad \varepsilon \leq n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \cdot (N^n - M^n).$$

Soll hierin  $\varepsilon$  der Bedingung  $0 < \varepsilon \leq 1$  gemäß wirklich den Wert 1 erreichen können, so muß

$$n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \cdot (N^n - M^n) \leq 1$$

sein; sollen andererseits die Schwankungen  $\delta f_\mu$ , die zufolge a<sub>2</sub><sup>o</sup>) mit wachsendem  $N$  sinken, nicht unnötig eingeschränkt werden, so muß

$$n \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^n \cdot (N^n - M^n) = 1, \text{ oder } N = \sqrt[n]{M^n + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n}$$

genommen werden. — Rekapitulieren wir alles bisherige, so haben wir folgendes Resultat: Bestimmt man eine Zahl  $N$  mittels der Gleichung

$$A^o) \quad N = \sqrt[n]{M^n + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n}$$



und beschränkt man die Schwankungen  $\delta f_\mu$  gemäß den Beziehungen:

$$B^0) \quad \text{mod } \delta f_\mu \leq \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{xN}\right)^{n-\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

worin

$$C^0) \quad 0 < \varepsilon \leq 1$$

ist, so hat man

$$D^0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mod } \mathcal{A} = \varrho_1^t \cdot \varrho_2^u \dots \varrho_q^v < \varepsilon \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n, \text{ und folglich auch} \\ \varrho_1^t \cdot \varrho_2^u \dots \varrho_q^v < \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n. \end{array} \right.$$

Sind, was wir von nun an voraussetzen, die Schwankungen  $\delta f_\mu$  so eingeschränkt, daß die Ungleichheit  $D^0)$  erfüllt ist, so muß mindestens einer der Modulen  $\varrho_1 \dots \varrho_q$  kleiner als  $\frac{\sigma}{2}$  sein. Angenommen, es sei  $\varrho_1 < \frac{\sigma}{2}$ ; dann ist jeder

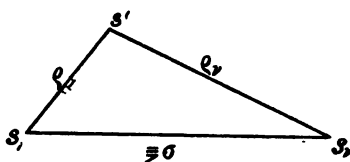


Fig. 2.

andere Modul  $\varrho_r$  ( $r = 2, 3 \dots q$ ) größer als  $\frac{\sigma}{2}$ , wie sich unmittelbar ergibt, wenn man das in der  $s$ -Ebene liegende Dreieck mit den Seiten  $\varrho_1, \varrho_r$ , mod  $(s_1 - s_r)$  betrachtet (Fig. 2).

Hieraus ergeben sich obere Grenzen für  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_q$ .

$$\text{Ist z. B. } \varrho_1 < \frac{\sigma}{2}, \text{ so ist } \varrho_2^u \dots \varrho_q^v > \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{u+\dots+v},$$

$$\text{oder} \quad \varrho_2^u \dots \varrho_q^v > \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n-t}.$$

Zusammen mit  $D^0)$  liefert dies:

$$\varrho_1 < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[t]{\varepsilon}.$$

Wir können daher allgemein sagen:

$$\text{Ist } \varrho_1 < \frac{\sigma}{2}, \text{ so ist } \varrho_1 = \text{mod}(s' - s_1) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[t]{\varepsilon},$$

$$,, \varrho_2 < \frac{\sigma}{2}, \quad ,, \quad \varrho_2 = \text{mod}(s' - s_2) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[u]{\varepsilon},$$

. . . . .

$$,, \varrho_q < \frac{\sigma}{2}, \quad ,, \quad \varrho_q = \text{mod}(s' - s_q) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[v]{\varepsilon},$$

und jedesmal alle übrigen  $\varrho$  gröfser als  $\frac{\sigma}{2}$ , wie klein auch  $\varepsilon$  sein mag. — In diesen Beziehungen bezeichnet  $s'$  eine der Wurzeln  $s'_1, \dots, s'_v, \dots, s'_n$ . Für jede dieser Wurzeln  $s'_t$  giebt es nach dem Vorigen eine Wurzel  $s_\mu$  der ursprünglichen Gleichung II<sup>o</sup>), so dafs

$$\text{mod}(s'_t - s_\mu) < \frac{\sigma}{2} \sqrt[\tau]{\varepsilon}$$

ist, wo  $\tau$  eine der Zahlen  $t, u, \dots, v$  bezeichnet.

Ist  $\text{mod}(s'_1 - s_\alpha) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[t]{\varepsilon}$ , so ist ferner für  $\varepsilon = 0: \lim s'_1 = s_\alpha$ ,

„  $\text{mod}(s'_2 - s_\beta) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[u]{\varepsilon}$ , „ „ „ „  $\varepsilon = 0: \lim s'_2 = s_\beta$ ,

. . . . .

„  $\text{mod}(s'_n - s_\gamma) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[v]{\varepsilon}$ , „ „ „ „  $\varepsilon = 0: \lim s'_n = s_\gamma$

wo  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  Indices aus der Reihe 1, 2,  $\dots, q$  sind. — Um etwas Näheres über diese Indices zu erfahren, erinnern wir uns daran, dafs

$$s'^n + (f_1 + \delta f_1) \cdot s'^{n-1} + \dots + (f_n + \delta f_n) \equiv (s' - s'_1)(s' - s'_2) \dots (s' - s'_n),$$

$$s^n + f_1 \cdot s^{n-1} + \dots + f_n \equiv (s - s_1)^t (s - s_2)^u \dots (s - s_q)^v,$$

und daher

$$\delta f_1 \cdot s'^{n-1} + \dots + \delta f_n \equiv (s' - s'_1) \dots (s' - s'_n) - (s - s_1)^t (s - s_2)^u \dots (s - s_q)^v$$

ist. Läßt man hierin  $\varepsilon = 0$  werden, so verschwindet, gemäß B<sup>o</sup>), die linke Seite identisch, rechts geht  $s'$  in  $s$ ,  $s'_1$  in  $s_\alpha$ ,  $s'_2$  in  $s_\beta$ ,  $\dots, s'_n$  in  $s_\gamma$  über, und es wird daher identisch:

$$(s - s_\alpha) (s - s_\beta) \dots (s - s_\gamma) = (s - s_1)^t \cdot (s - s_2)^u \dots (s - s_q)^v,$$

was nur dann möglich ist, wenn von den Indices  $\alpha, \beta, \dots \gamma$ ,  $t$  den Wert 1,  $u$  den Wert 2,  $\dots v$  den Wert  $q$  haben. — Wir können also den Satz aussprechen:

**Satz VI<sup>o</sup>)** Grenzt man die Schwankungen  $\delta f_\mu$  der Koeffizienten  $f_1 \dots f_n$  der Gleichung  $\Pi^0$ ) ein gemäß den Bedingungen:

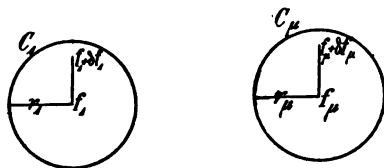
$$A^0) \quad N = \sqrt[n]{M^n + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n},$$

$$B^0) \quad \text{mod } \delta f_\mu \leq \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{xN}\right)^{n-\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \dots n)$$

$$C^0) \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

so ordnen sich die Wurzeln  $s'$  der neuen Gleichung in so viel Gruppen, als die Gleichung  $\Pi^0$ ) von einander verschiedene Wurzeln hatte. Einer  $t$ -fachen Wurzel  $s_1$  von  $\Pi^0$ ) entspricht eine Gruppe von  $t$  Wurzeln  $s'$  der neuen Gleichung, und es ist für jede dieser  $t$  Wurzeln

$$\text{mod } (s' - s_1) < \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[n]{\varepsilon};$$



für  $\varepsilon = 0$  gehen diese  $t$  Wurzeln  $s'$  alle über in  $s_1$ .

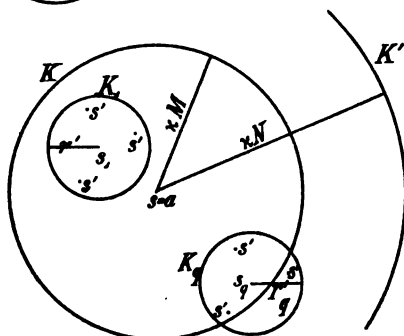


Fig. 3.

Der Inhalt dieses Satzes läßt sich geometrisch leicht veranschaulichen. — Wir führen zwei Zahlenebenen ein, eine für die Koeffizienten und eine für die Wurzeln. In der  $f$ -Ebene markieren wir die  $n$  Punkte, welche die Werte von  $f_1 \dots f_n$  für ein bestimmtes  $z$  darstellen (Fig. 3), und schlagen

um diese  $n$  Punkte Kreise  $C_1, \dots C_\mu \dots C_n$  mit den Radien

$$p_\mu = \frac{\varepsilon}{n} \left( \frac{\sigma}{2} \right)^n \cdot \left( \frac{1}{xN} \right)^{n-\mu}, \quad (\mu = 1, 2 \dots n).$$

Die Bedingung B<sup>o</sup>) für  $\text{mod } df_\mu$  heisst dann nichts anderes, als: dass die Koeffizienten  $f_1, \dots f_\mu, \dots f_n$  in ihren Schwankungen auf das Innere der Kreise  $C_1, \dots C_\mu, \dots C_n$  beschränkt sein sollen. Wird  $\varepsilon = 0$ , so reduzieren  $C_1 \dots C_n$  sich auf ihren Mittelpunkt. In der  $s$ -Ebene markieren wir ebenso die  $q$  Wurzeln  $s_1 \dots s_q$ . Die entsprechenden Punkte, die wir kurzweg mit  $s_1 \dots s_q$  bezeichnen, liegen alle innerhalb eines um den Punkt  $s = 0$  als Mittelpunkt mit dem Radius  $xM$  beschriebenen Kreises  $K$ . Um  $s_1 \dots s_q$  als Mittelpunkte beschreiben wir weiter Kreise  $K_1, \dots K_q$  mit den Radien  $r'_1 = \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[q]{\varepsilon}, \dots r'_q = \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt[q]{\varepsilon}$ ; diese Kreise liegen alle inner-

halb eines um  $s = 0$  als Mittelpunkt mit dem Radius  $xN > xM$  beschriebenen Kreises  $K'$ . Nach dem vorigen Satze liegen dann, so lange  $f_1, \dots f_n$  in ihren Schwankungen auf das Innere der Kreise  $C_1 \dots C_n$  beschränkt sind, innerhalb  $K_1$   $t$  Wurzeln  $s'$ , innerhalb  $K_2$   $u, \dots$  innerhalb  $K_q$   $v$  Wurzeln  $s'$ . Es sind somit alle Wurzeln  $s'$  eingegrenzt, und zwar, da  $K_1, \dots K_q$  sich nicht schneiden können, jede nur einmal.

Die im Vorigen durchgeführte, von Christoffel in seinen Vorlesungen über Abel'sche Funktionen vorgetragene Methode der Eingrenzung der Wurzeln, benutzen wir, um nachzuweisen, dass  $s_1 \dots s_n$  stetige Funktionen von  $f \dots f_n$  sind.

**Definition:** Eine Funktion  $S$  der komplexen Variabel  $t$  heisst innerhalb eines bestimmten Gebietes  $G$  der  $t$ -Ebene stetige Funktion von  $t$ , wenn mit der grössten Schwankung von  $t$  innerhalb  $G$  auch die Maximalschwankung von  $S$  innerhalb des  $G$  entsprechenden Gebietes der  $S$ -Ebene verschwindet.\*)

---

\*) Christoffel: Mathem. Ann. Bd. 53.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß der **Maximalschwankung** von  $t$  innerhalb  $G$  die **Maximalschwankung** von  $S$  nicht zu entsprechen braucht.

Beschränken wir, wie im Vorhergehenden, die Schwankungen  $\delta f_\mu$  auf das Innere der Kreise  $C_1, \dots, C_n$ , so sind die **Maximalschwankungen** von  $f_1 \dots f_n$  innerhalb dieser Gebiete:

$$2r_1, 2r_2, \dots, 2r_n.$$

Die **Maximalschwankungen** von  $s_1, \dots, s_n$  innerhalb der entsprechenden, nachgewiesenen Schwankungsgebiete  $K_1 \dots K_q$  sind

$$2r'_1, 2r'_2, \dots, 2r'_q.$$

Aus den Werten der  $r$  und  $r'$  ergibt sich aber: läßt man  $\varepsilon$  kleiner werden, so nehmen  $2r_1, \dots, 2r_n$  und mit ihnen  $2r'_1, \dots, 2r'_q$  ab; wird  $\varepsilon = 0$ , so verschwinden  $2r_1, \dots, 2r_n$  und zugleich auch  $2r'_1, \dots, 2r'_q$ . Zusammen mit den Sätzen II<sup>o</sup>) und III<sup>o</sup>); dieses Paragraphen liefert dies den

**Satz VII<sup>o</sup>)** Die Wurzeln  $s_1, \dots, s_n$  der algebraischen Gleichung

$$s^n + f_1 \cdot s^{n-1} + \dots + f_n = 0$$

sind stetige Funktionen der Koeffizienten  $f_1, \dots, f_n$ , so lange keiner dieser Koeffizienten unendlich wird.

Die Koeffizienten  $f_1, \dots, f_n$  sind rationale Funktionen von  $z$ , also stetige Funktionen von  $z$ , so lange sie nicht  $\infty$  werden. Innerhalb eines Gebietes  $G$  der  $z$ -Ebene, in dem  $f_1, \dots, f_n$  endlich bleiben, verschwinden also mit der **Maximalschwankung** von  $z$  auch die **Maximalschwankungen** von  $f_1, \dots, f_n$ , und mit diesen, nach dem vorigen Satze, auch die **Maximalschwankungen** von  $s_1, \dots, s_n$ . Wir haben so den

**Satz VIII<sup>o</sup>)** Jede algebraische Funktion  $s$  ist stetige Funktion von  $z$ , so lange sie nicht unendlich wird.

Fassen wir alle Resultate dieses Paragraphen zusammen, so erhalten wir den

**Fundamentalsatz:** Die einzige Art von Unstetigkeit, die eine algebraische Funktion darbieten kann, besteht darin, dafs sie unendlich wird; dies wird sie nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft.

Dieser Fundamentalsatz gilt auch für die einwertigen rationalen Funktionen von  $z$ ; während diese letzteren aber, aufser dem Unendlichwerden, keine weitere Art von Singularitäten aufweisen, werden wir im folgenden Paragraphen eine zweite Art von Singularitäten algebraischer Funktionen kennen lernen.

### § 3. Mehrdeutigkeit der algebraischen Funktionen; Verzweigungspunkte und vielfache Punkte.

Bei den folgenden Betrachtungen nehmen wir die Grundgleichung

$$\varphi_0 \cdot s^n + \varphi_1 \cdot s^{n-1} + \dots + \varphi_n = 0$$

als irreducibel an, d. h., wir setzen voraus, das Polynom  $\varphi_0 \cdot s^n + \dots + \varphi_n$  lasse sich nicht zerlegen in zwei in  $s$  und  $z$  ganze Faktoren.

In der  $z$ -Ebene nehmen wir einen beliebigen, nicht singulären Punkt  $z = \alpha$ , in dem also  $s_1, \dots, s_n$   $n$  von einander verschiedene Werte haben. Eine dieser Wurzeln, etwa  $s_1$ , fassen wir ins Auge.

Vom Punkte  $z = \alpha$  ausgehend, lassen wir  $z$  auf einem Wege  $l$ , der sonst beliebig ist, aber durch keinen singulären Punkt hindurchgehen soll, bis zum Punkte  $z = \beta$  gehen (Fig. 4). Nach dem Schlußsatz des vorigen Paragraphen ändert sich  $s_1$  stetig auf diesem Wege und geht vom Anfangswerte  $s_1(\alpha)$  in einen bestimmten Endwert  $s_1(\beta)$  über. Diesen Weg  $l$  ändern wir nun, mit Beibehaltung der Punkte  $\alpha$  und  $\beta$ , in folgender Weise.

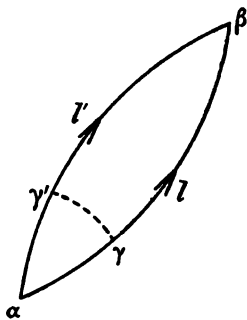


Fig. 4.

Jedem Punkte  $\gamma$  von  $l$ , in dem  $f_1 \dots f_n$  die Werte  $f_1(\gamma), \dots, f_n(\gamma)$  haben mögen, ordnen wir einen außerhalb  $l$  liegenden Punkt  $\gamma'$  so zu, daß die Bedingungen:

$$A^0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mod } \delta f_\mu \leq \frac{\varepsilon}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\alpha N}\right)^{n-\mu}, \\ 0 < \varepsilon \leq 1, \\ N = \sqrt[n]{M^n + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right)^n} \end{array} \right.$$

erfüllt bleiben. Dadurch wird dem Werte  $s_1(\gamma)$  nach den Resultaten des vorigen Paragraphen eine und nur eine Wurzel  $s'_1$  so zugeordnet, daß

$$\text{mod } (s'_1(\gamma') - s_1(\gamma)) < \frac{\sigma}{2} \cdot \varepsilon$$

ist. Führen wir dies für alle Punkte von  $l$  so aus, daß die Punkte  $\gamma'$  einen zusammenhängenden von  $\alpha$  nach  $\beta$  führenden Linienzug  $l'$  bilden, so wird  $l'$  um so näher bei  $l$  liegen, je kleiner wir  $\varepsilon$  nehmen, und es wird sich  $s'_1$  längs  $l'$  stetig ändern. Zu Anfang ist  $s'_1(\alpha) = s_1(\alpha)$ , längs  $l'$  ist überall

$\text{mod } (s'_1 - s_1) < \frac{\sigma}{2} \cdot \varepsilon$  und für  $\varepsilon = 0$  geht  $s'_1$  in  $s_1$  über; im

Punkt  $\beta$  ist also wieder  $s'_1(\beta) = s_1(\beta)$ , d. h.: geht  $s_1$  auf den zwei benachbarten Wegen  $l$  und  $l'$ , deren Nachbarschaft durch die Bedingungen  $A^0$  festgelegt ist, vom nicht singulären Punkt  $\alpha$  zum nicht singulären Punkt  $\beta$ , so erreicht es in  $\beta$  jedesmal denselben Endwert. Dasselbe gilt einzeln für  $s_2, \dots, s_n$ .

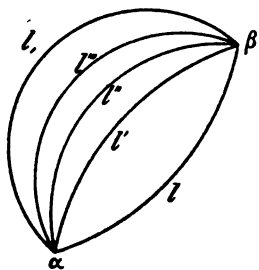


Fig. 5.

Konstruiert man, unter beständiger Innehaltung der Bedingungen  $A^0$  zu  $l'$  weitere Nachbarwege  $l'', l'''$ , u. s. w., so erhält man schließlich zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Wege  $l$  und  $l_1$  (Fig. 5), deren entsprechende Punkte überall endlichen Abstand von einander haben. Liegt weder auf  $l$  und  $l_1$ , noch zwischen denselben ein singulärer Punkt, so führen beide Wege jede Wurzel  $s$ , von

demselben Anfangswerte  $s, (\alpha)$  zu demselben Endwerte  $s, (\beta)$ .

Die Natur der hierbei ausgeschlossenen singulären Punkte läßt sich genauer angeben. Wird  $s$  innerhalb des von  $l$  und  $l_1$  begrenzten Flächenstückes  $G_\infty$ , so setze man

$$S = \frac{s}{s-a}, \text{ oder umgekehrt } s = \frac{aS}{S-1},$$

wo  $a$  eine Konstante ist. Für  $s = \infty$  wird  $S = 1$ ; diejenigen Punkte  $z$ , in denen  $S = \infty$  wird, sind die Punkte, in denen  $s = a$  wird, also die Wurzeln der Gleichung:

$$a^n + f_1(z) \cdot a^{n-1} + \dots + f_n(z) = 0.$$

Wählt man daher die Konstante  $a$  so, daß die  $m$  Wurzeln dieser Gleichung außerhalb  $G$  liegen, so ist  $S$  innerhalb  $G$  stetig. Die Wege  $l$  und  $l_1$  führen dann  $S$  von demselben Anfangswerte zu demselben Endwerte, wofern  $G$ ,  $l$  und  $l_1$  keine Wurzelkoincidenz von  $S$  enthalten. Da aber die Wurzelkoincidenzen für  $S$  und  $s$  stets für dieselben Werte von  $z$  auftreten, und  $a$  immer so gewählt werden kann, daß  $S$  in  $G$  nicht  $\infty$  wird, so ergibt sich aus dem Vorigen der

**Satz I<sup>o</sup>)** Wird die algebraische Funktion  $s$  von irgend einem Punkte  $\alpha$  zu irgend einem Punkte  $\beta$  stetig fortgesetzt auf 2 verschiedenen Wegen  $l$  und  $l_1$ , und ihr in  $\alpha$  jedesmal derselbe Anfangswert erteilt, so erlangt sie in  $\beta$  jedesmal denselben Endwert, wofern weder auf noch zwischen  $l$  und  $l_1$  eine Wurzelkoincidenz vorkommt.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar:

**Satz II<sup>o</sup>)** Jeder geschlossene Weg (Ringweg)  $l$ , der keine Wurzelkoincidenz umschließt, führt jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück.

Beweis: Läßt man in Satz I<sup>o</sup>) den Endpunkt  $\beta$  des Weges  $l$  mit dem Anfangspunkte  $\alpha$  zusammenfallen, so geht  $l$  in einen Ringweg über, während  $l_1$  sich auf den Punkt  $\alpha$  reduziert, also irgend eine Wurzel  $s$ , vom Werte  $s, (\alpha)$  zu demselben Werte  $s, (\alpha)$  überführt. Sind dann die Bedingungen des Satzes I<sup>o</sup>) erfüllt, so umschließt  $l$  keine Wurzelkoincidenz



und führt jede Wurzel  $s_v$  vom Anfangswerte  $s_v(\alpha)$  zu demselben Endwerte wie  $l_1$ , d. h. zum Endwerte  $s_v(\alpha)$ , w. z. b. w.

Weiter gelten folgende Sätze.

**Satz III<sup>o</sup>)** Es giebt in der  $z$ -Ebene stets Ringwege, die eine beliebige Wurzel  $s_v$  nicht zu ihrem Anfangswerte zurückführen.

Beweis: Würde  $s_v$  auf jedem Ringwege zu seinem Anfangswerte zurückkehren, so wäre  $s_v$  eine einwertige Funktion von  $z$ , und weil sie nur durch Unendlichwerden unstetig wird und dies nur zu endlicher Ordnung und in einer endlichen Anzahl von Punkten, sogar eine rationale Funktion von  $z$ .  $s - s_v$  wäre dann auch rational in  $z$ , was der Annahme widerspricht, daß die Grundgleichung irreducibel sei.

**Satz IV<sup>o</sup>)** Für jeden Ringweg  $l$  bilden die Endwerte der Wurzeln eine Permutation der Anfangswerte.

Beweis: Der Ringweg  $l$  führe die  $n$  Wurzeln

über in

$$\begin{array}{c} s_1, s_2, \dots s_n \\ s'_1, s'_2, \dots s'_n. \end{array}$$

Dann wird zugleich das Gleichungspolynom

$$\Phi = \varphi_0 (s - s_1) (s - s_2) \dots (s - s_n)$$

übergeführt in

$$\Phi' = \varphi_0 (s - s'_1) (s - s'_2) \dots (s - s'_n).$$

Da  $\Phi$  aber ganze Funktion von  $z$  sind, so ist identisch

$$\Phi = \Phi',$$

was nur möglich ist, wenn die Endwerte  $s'_1 \dots s'_n$  bis auf die Reihenfolge mit den Anfangswerten  $s_1 \dots s_n$  übereinstimmen.

Nach Satz II<sup>o</sup>) kann die durch einen Ringweg herbeigeführte Permutation der Anfangswerte die identische Permutation sein, nach Satz III<sup>o</sup>) ist dies aber jedenfalls nicht immer der Fall.

**Satz V<sup>o</sup>)** Die durch einen Ringweg herbeigeführte Permutation der Anfangswerte der Wurzeln läßt sich stets in eine Anzahl cyklischer Permutationen dieser Anfangswerte auflösen.

Der Beweis ergibt sich aus der Lehre von den Permutationen.

**Satz VI<sup>o</sup>)** Es läßt sich, bei irreducibeler Grundgleichung, stets ein Ringweg so anlegen, daß er eine beliebige Wurzel, etwa  $s_1$ , in eine beliebige andere Wurzel überführt;

und umgekehrt:

gibt es solche Ringwege, so ist die Grundgleichung irreducibel.

Beweis: Ad 1<sup>o</sup>) Angenommen,  $s_1$  lasse sich durch keinen Ringweg in eine der Wurzeln  $s_2 \dots s_n$  überführen; dann giebt es nach Satz III<sup>o</sup>) sicher einen Ringweg, der  $s_1$  in  $s_2$  überführt. Ist  $l$  ein solcher Ringweg, so sind zwei Möglichkeiten vorhanden:

$\alpha^o$ ) auch  $s_2$  läßt sich in keine der Wurzeln  $s_3 \dots s_n$  überführen; dann giebt es, wieder nach Satz III<sup>o</sup>), einen Ringweg, der  $s_2$  in  $s_1$  überführt. Das Produkt  $(s - s_1)(s - s_2)$  wäre daher eine einwertige, rationale Funktion von  $z$  und die Grundgleichung wäre reducibel, was der Voraussetzung widerspricht.

$\beta^o$ )  $s_2$  läßt sich durch einen Ringweg  $\lambda$  in eine der Wurzeln  $s_3, \dots, s_n$ , etwa in  $s_n$ , überführen. Dann wird auch  $s_1$ , wenn  $z$  hinter einander die Ringwege  $l$  und  $\lambda$  durchläuft, in  $s_n$  übergeführt, was gegen die Annahme ist, daß  $s_1$  in keine der Wurzeln  $s_3 \dots s_n$  übergeführt werden kann. — Diese letztere Annahme steht also im Falle  $\alpha^o$ ) in Widerspruch mit der vorausgesetzten Irreducibilität der Grundgleichung, im Falle  $\beta^o$ ) in Widerspruch mit sich selbst, ist also falsch.

Ad 2<sup>o</sup>) Wäre die Grundgleichung nicht irreducibel, so ließe sich das Polynom  $\Phi$  derselben in mindestens zwei Faktoren

$$\Phi_1 = (s - s_1) \dots (s - s_x) \dots (s - s_k),$$

$$\Phi_2 = (s - s_{k+1}) \dots (s - s_v) \dots (s - s_n), \quad (\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2)$$

zerlegen, die einwertige, rationale Funktionen von  $z$  sind. Führt dann ein Ringweg  $l$  eine Wurzel  $s_x$  von  $\Phi_1 = 0$  in eine Wurzel  $s_v$  von  $\Phi_2 = 0$  über, so führt dieser Ringweg,

die Ungleichheit der  $n$  Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  vorausgesetzt,  $\Phi_1$  nicht zu seinem Anfangswert zurück, d. h.  $\Phi_1$  ist nicht einwertige Funktion von  $z$ . Die Annahme, die Grundgleichung sei unter den obigen Voraussetzungen nicht irreducibel, steht daher in Widerspruch mit sich selbst.

**Satz VII<sup>o</sup>)** Kann ein Ringweg  $l$  durch Zusammenziehen oder Erweitern in einen anderen Ringweg  $\lambda$  so deformiert werden, daß dabei keine Wurzelkoincidenz überschritten wird, so liefern beide Ringwege  $l$  und  $\lambda$  dieselbe Permutation der Wurzeln, vorausgesetzt, daß man alle Wurzeln vom Anfangspunkte  $a$  von  $l$  stetig fortsetzt bis zum Anfangspunkte  $\alpha$  von  $\lambda$  (Fig. 6<sup>o</sup>).

Beweis:  $a^o$ ) Enthält der innere Ringweg keine Wurzelkoincidenz, so ergibt sich die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus Satz II<sup>o</sup>).

$b^o$ ) Der innere Ringweg (hier  $\lambda$ ) umschließe Wurzelkoincidenzen. In diesem Falle denken wir uns den Ringweg  $l (= amna)$  zuerst zusammengezogen in den Ringweg  $l_1 (= a\alpha\mu\nu\beta\alpha)$ , der zum Teil mit  $\lambda$  zusammenfällt (Fig. 6<sup>o</sup>).

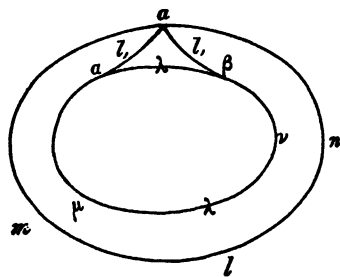


Fig. 6.

Da zwischen  $l$  und  $l_1$  keine Wurzelkoincidenz liegt, so führen beide jede Wurzel  $s_v$  zu demselben Endwerte, liefern also dieselbe Permutation der Anfangswerte  $s_v(a)$ . Denkt man sich daher jede der  $n$  Wurzeln  $s_1 \dots s_v \dots s_n$  von ihrem Anfangswerte  $s_v(a)$  stetig fortgesetzt bis zum Punkte  $\alpha$  längs des Weges  $a l_1 \alpha$  und bezeichnet die Werte im Punkte  $\alpha$

mit  $s_v(\alpha)$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ), so führt der Ringweg  $\alpha\mu\nu\beta\alpha$  eine Permutation der Anfangswerte  $s_v(\alpha)$  herbei, die gleich ist der Permutation der Anfangswerte  $s_v(a)$ , die der Ringweg  $amna$  liefert. Nach Satz I<sup>o</sup>) läßt sich aber, bei der stetigen Fortsetzung einer Wurzel, der Weg  $\beta l_1 \alpha l_1 \alpha$  ohne Änderung des Endwertes ersetzen durch den Weg  $\beta\lambda\alpha$ . Der Ringweg  $\lambda (= \alpha\mu\nu\beta\alpha)$  bringt daher dieselbe Permutation der Anfangs-

werte  $s_v(\alpha)$  hervor, wie der Ringweg  $l_1$ , d. h. der Ringweg  $l$  permutiert die Anfangswerte  $s_v(\alpha)$  genau ebenso wie der Ringweg  $l$  die Anfangswerte  $s_v(\alpha)$  permutiert, w. z. b. w.

Aus den vorhergehenden Sätzen ergibt sich, daß, wenn eine algebraische Funktion  $s$  längs eines von  $z$  beschriebenen Ringweges  $l$  stetig fortgesetzt wird, es für den Endwert von  $s$  von entscheidendem Einfluß ist, ob  $l$  Wurzelkoincidenzen umschließt oder nicht. Soll eine durch eine gegebene Gleichung definierte algebraische Funktion  $s$  von  $z$  genauer studiert werden, so hat man daher zuerst die Wurzelkoincidenzen zu ermitteln und hierauf deren Einfluß zu untersuchen. Zu diesem letzteren Zwecke legt man um die einmal ermittelten Koincidenzpunkte Ringwege, die immer nur je eine Koincidenz umschließen. Diese Ringwege denken wir uns, was nach Satz VII<sup>o</sup>) erlaubt ist, so angelegt, daß sie die Koincidenzpunkte in unmittelbarer Nähe umlaufen (Puisseux's „courbes élémentaires“).

Über die Koincidenzpunkte ist noch Folgendes zu bemerken:

Ist  $c = a$  ein Koincidenzpunkt, in dem  $x$  Wurzeln der Grundgleichung denselben endlichen oder unendlichen Wert annehmen, so sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1<sup>o</sup>) Ein den Punkt  $z = a$  in unmittelbarer Nähe umlaufender Ringweg  $l$  führt diese  $x$  Wurzeln in eine Permutation derselben über, die aus einem einzigen  $x$ -gliedrigen Cyklus besteht. In diesem Falle heißt  $a$  ein Verzweigungspunkt der Funktion  $s$  und zwar ein  $(x-1)$ facher Verzweigungspunkt oder ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $x$ . Ist speziell  $x = 2$ , so heißt der Punkt  $z = a$  ein einfacher Verzweigungspunkt.

2<sup>o</sup>) Der Ringweg  $l$  führt die  $x$  Wurzeln über in eine Permutation derselben, die sich in  $\mu$  Cyklen auflöst. Die Anzahl der Elemente in diesen Cyklen sei  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$  ( $x = x_1 + \dots + x_\mu$ ), wo nicht alle Zahlen  $x_1, \dots, x_\mu$  gleich 1 sind. Der Punkt  $z = a$  ist dann wieder ein Verzweigungspunkt der Funktion  $s$  und zwar läßt sich derselbe ansehen als entstanden aus der Vereinigung von  $\mu$  Vereinigungspunkten von den resp. Ordnungen  $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ . Ist eine der Zahlen  $x_1, \dots, x_\mu$ , etwa  $x$ , gleich 1, so ist  $z = a$  für die den entsprechenden eingliedrigen Cyklus bildende Wurzel

kein Verzweigungspunkt, sondern ein nicht singulärer, regulärer Punkt.

3<sup>o</sup>) Der Ringweg  $l$  führt die  $x$  Wurzeln in eine Permutation derselben über, die sich in  $x$  eingliedrige Cyklen auflöst. In diesem Falle heißt  $z = a$  ein  $x$ -facher Punkt von  $s$  ohne Verzweigung, oder ein  $x$ -facher Punkt mit getrennten Zweigen. Einen solchen Punkt rechnen wir nicht mehr zu den singulären Punkten.

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß es auch Punkte  $z = a$  geben kann, in denen  $x$  Wurzeln denselben Wert  $\sigma$ ,  $x'$ -Wurzeln denselben, von  $\sigma$  verschiedenen Wert  $\sigma'$ , ... annehmen. In diesem Falle sind für jede der aus  $x, x' \dots$  Wurzeln bestehenden Wurzelgruppen die drei eben besprochenen Möglichkeiten in Betracht zu ziehen.

Die Resultate dieses und des vorigen Paragraphen haben uns gezeigt, daß die algebraischen Funktionen von  $z$  nur zwei Arten von Singularitäten aufweisen: Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte. Die Art des Unstetigwerdens ist bei den algebraischen Funktionen dieselbe, wie bei den einwertigen rationalen Funktionen von  $z$ ; beide werden unstetig nur durch Unendlichwerden, sie werden  $\infty$  nur zu endlicher Ordnung und nicht  $\infty$  oft. Bei den algebraischen Funktionen treten dann noch Verzweigungspunkte auf, und diese sind es, auf denen die Mehrdeutigkeit dieser Funktionen beruht.

#### § 4. Beispiele mehrdeutiger Funktionen.

Die im Vorigen abgeleiteten Resultate wollen wir in diesem Paragraphen an einigen speziellen Beispielen erläutern und namentlich zeigen, wie geeignete Ringwege die Wurzeln einer algebraischen Gleichung permutieren.

Beispiel I<sup>o</sup>) Sei

$$s^2 - (z - a) = 0.$$

Die durch diese Gleichung definierte algebraische Funktion  $s$  von  $z$  ist 2-wertig; ihre beiden Zweige  $s_1, s_2$  sind gegeben durch die Gleichungen:

$$s_1 = +\sqrt{z - a}, \quad s_2 = -\sqrt{z - a}.$$

Im Punkte  $z = a$  wird  $s_1 = s_2 = 0$ ;  $z = a$  ist also ein **Koincidenzpunkt**.

Von einem in der Nähe von  $z = a$  gelegenen Punkte  $z = \zeta$ , in dem  $s$  die 2 entgegengesetzt gleichen Werte  $\sigma_1 = +\sqrt{\zeta - a}$ ,  $\sigma_2 = -\sqrt{\zeta - a}$  besitzt, beschreiben wir um den Punkt  $z = a$  einen Ringweg  $l$  (Fig. 7<sup>o</sup>). Ist nun in Polarkoordinaten:

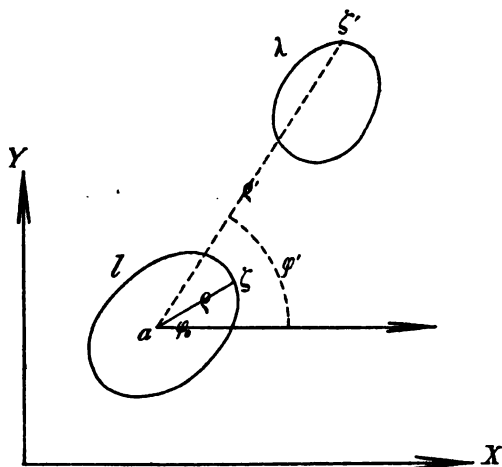


Fig. 7.

$$\begin{aligned} z - a &= r \cdot e^{i\varphi}, \\ \zeta - a &= \varrho \cdot e^{i\varphi_0}, \end{aligned}$$

so ist

$$\sigma_1 = \varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{2}\varphi_0}, \quad \sigma_2 = -\varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{2}\varphi_0}.$$

Beschreibt  $z$  von  $z = \zeta$  aus den Ringweg  $l$ , so wächst  $\varphi_0$  um  $2\pi$ , und es geht

$$\sigma_1 \text{ über in } s = \varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right)} = \sigma_2,$$

$$\text{und } \sigma_2 \text{ „ „ } s = -\varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right)} = \sigma_1.$$

Der Ringweg  $l$  permutiert also die 2 Wurzeln  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , d. h.  $z - a$  ist ein Verzweigungspunkt der durch  $s^2 - (z - a) = 0$  definierten algebraischen Funktion  $s$ .

Ein zweimaliger Umlauf um  $z = a$  führt jede Wurzel wieder in sich selbst über. Läßt man  $z$  von einem Punkt  $\zeta'$  aus (Fig. 7) für den  $\zeta' - a = \rho' \cdot e^{i\varphi'}$  ist, einen Ringweg  $\lambda$  durchlaufen der  $z = a$  nicht umschließt, so kehrt, wie die Figur zeigt,  $\varphi'$  zu seinem Anfangswerte zurück. Ein solcher Ringweg führt daher, in Übereinstimmung mit Satz II<sup>o</sup>) § 3, jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück.

Beispiel II<sup>o</sup>) Sei

$$s^2 - (z^3 - a^3) = 0.$$

Die Funktion  $s$  ist zweiwertig; ihre 2 Zweige  $s_1, s_2$  sind definiert durch die 2 Gleichungen:

$$s_1 = + \sqrt{(z - a)(z - \alpha a)(z - \alpha^2 a)},$$

$$s_2 = - \sqrt{(z - a)(z - \alpha a)(z - \alpha^2 a)},$$

wo  $\alpha$  die 3<sup>te</sup> Einheitswurzel  $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$  bezeichnet. —  
Koincidenzpunkte sind die Punkte  $z = a, z = \alpha a, z = \alpha^2 a$ .

Führt man Polarkoordinaten ein, und setzt:

$$z - a = r_1 \cdot e^{i\varphi_1},$$

$$z - \alpha a = r_2 \cdot e^{i\varphi_2},$$

$$z - \alpha^2 a = r_3 \cdot e^{i\varphi_3},$$

so erhält man:

$$s = (r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{2}}.$$

Beschreibt  $z$  einen Ringweg  $l$ , der keinen der 3 Punkte  $a, \alpha a, \alpha^2 a$  einschließt, so kehrt jeder der 3 Winkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  zu seinem Anfangswerte zurück. (Fig. 8). Ein solcher Ringweg führt also, in Übereinstimmung mit Satz II, § 3, jede der Wurzeln  $s_1, s_2$  zu ihrem Anfangswerte zurück.

Beschreibt  $z$  einen Ringweg  $l$ , der einen der 3 Punkte  $a, \alpha a, \alpha^2 a$ , etwa  $a$ , umschließt, so wächst  $\varphi_1$  um  $2\pi$ ,  $\varphi_2$

und  $\varphi_3$  aber kehren zu ihren Anfangswerten zurück. Es geht also

$$s_1 \text{ über in } + (r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} i (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\pi} = s_2,$$

$$\text{und } s_2 \text{ in } - (r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} i (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\pi} = s_1.$$

Ein solcher Ringweg permutiert daher die 2 Wurzeln  $s_1$  und  $s_2$ . Dasselbe gilt von allen Ringwegen, die nur einen der drei Punkte  $a$ ,  $a\alpha$ ,  $\alpha_2 a$  umschließen, d. h. die Punkte  $a$ ,  $a\alpha$ ,  $\alpha_2 a$  sind Verzweigungspunkte von  $s$ .

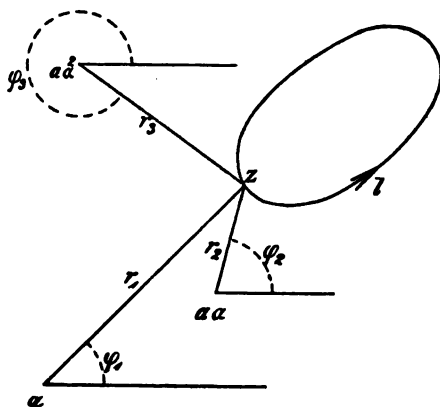


Fig. 8.

Beschreibt  $z$  einen Ringweg  $l$ , der 2 der 3 Verzweigungspunkte, etwa  $a$  und  $a\alpha$ , umläuft, so kehrt  $\varphi_3$  wieder zu seinem Anfangswerte zurück, während  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  je um  $2\pi$  wachsen. Es geht dann

$$s_1 \text{ in } + (r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{2} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + 2\pi i} = s_1,$$

$$\text{und } s_2 \text{ „ } = (r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{i}{2} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + 2\pi i} = s_2$$



über. Ein solcher Ringweg führt daher jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück. Dasselbe Resultat erhält man,

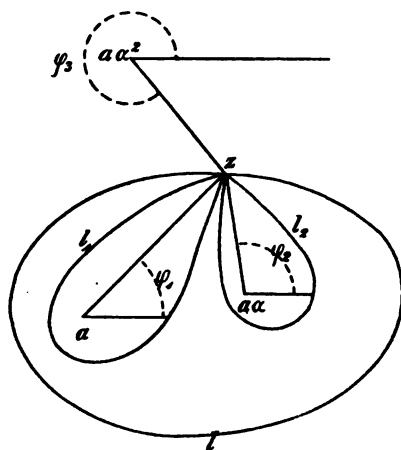


Fig. 9.

wenn man, was nach Satz VII<sup>0</sup>) § 3, erlaubt ist, den Ringweg  $l$  durch zwei von demselben Punkte ausgehenden Ringwege  $l_1$  und  $l_2$  (Fig. 9) ersetzt, von denen  $l_1$  nur den einen Verzweigungspunkt  $a, l_2$  nur  $a\alpha$  umschließt.

Jeder Ringweg endlich, der die 3 Verzweigungspunkte  $a, a\alpha, a^2a$  umschließt, permutiert  $s_1$  und  $s_2$ . — Es wird sich später\*) ergeben, daß der unendlich ferne Punkt

$z = \infty$  der  $z$ -Ebene ebenfalls ein Verzweigungspunkt von  $s$  ist, ein Resultat, daß sich übrigens ohne Schwierigkeit auch aus Satz II<sup>0</sup>) § 3 ableiten ließe.

Beispiel III<sup>0</sup>) Sei

$$s^2 - (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{2q+1}) = 0.$$

Die Funktion  $s$  ist zweiwertig und besitzt, wie eine Wiederholung der Betrachtungen des vorigen Beispiels ergibt, einfache Verzweigungspunkte an den Stellen  $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2q+1}$ . Dazu kommt noch, wie in Beispiel II<sup>0</sup>) ein Verzweigungspunkt im Unendlichen.

Ringwege in der  $z$ -Ebene permutieren die 2 Wurzeln  $s_1, s_2$  oder führen jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück, je nachdem sie eine ungerade Anzahl 1, 3,  $\dots, 2q+1$  oder eine gerade Anzahl 0, 2,  $\dots, 2q$  der Verzweigungspunkte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2q+1}$  umschließt.

\*) Aus Satz III<sup>0</sup>) § 5).

Beispiel IV<sup>0</sup>) Sei

$$s^3 \cdot (z - b_1)(z - b_2) - (z - a_1)(z - a_2) = 0.$$

Die durch diese Gleichung definierte algebraische Funktion  $s$  ist dreiwertig. Bezeichnen  $s_1, s_2, s_3$  ihre Werte für ein gegebenes  $z$ , und ist

$$s_1 = \sqrt[3]{\frac{(z - a_1)(z - a_2)}{(z - b_1)(z - b_2)}},$$

wo die dritte Wurzel den in der Arithmetik gebräuchlichen Sinn hat, so sind  $s_2$  und  $s_3$  gegeben durch

$$\begin{aligned} s_2 &= \alpha \cdot s_1, \\ s_3 &= \alpha^2 \cdot s_1, \end{aligned}$$

wo  $\alpha$  wieder die dritte Einheitswurzel  $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$  bedeutet. — Führt man Polarkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} z - a_1 &= r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, & z - a_2 &= r_2 \cdot e^{i\varphi_2}, \\ z - b_1 &= \varrho_1 \cdot e^{i\psi_1}, & z - b_2 &= \varrho_2 \cdot e^{i\psi_2}, \end{aligned}$$

so wird

$$s_1 = \left( \frac{r_1 r_2}{\varrho_1 \varrho_2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{3} - \frac{\psi_1 + \psi_2}{3} \right)}$$

und wieder

$$s_2 = \alpha s_1, \quad s_3 = \alpha^2 s_1.$$

Die Funktion  $s$  besitzt Wurzelkoincidenzen in den Punkten  $a_1, a_2$ ; dort wird  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ . Ebenso findet Koincidenz statt in den Punkten  $b_1, b_2$ ; dort wird  $s_1 = s_2 = s_3 = \infty$ .

Bezüglich der möglichen Ringwege  $l$  unterscheiden wir folgende Fälle:

1<sup>o</sup>)  $l$  umschließt keinen der vier Verzweigungspunkte: alle Wurzeln kehren zu ihrem Anfangswert zurück.

2<sup>o</sup>)  $l$  umschließt den einen Verzweigungspunkt  $a_1$ : beim Durchlaufen von  $l$  in positiver Richtung, d. h. in der Richtung der wachsenden Winkel, wächst  $\varphi_1$  um  $2\pi$ , während  $\varphi_2, \psi_1$  und  $\psi_2$  ihre Anfangswerte wieder erreichen.  $l$  führt daher

$$s_1 \text{ über in } \left( \frac{r_1 r_2}{\varrho_1 \varrho_2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{3} - \frac{\psi_1 + \psi_2}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)}$$

$$= s_1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} = s_1 \cdot \alpha = s_2,$$

und  $s_2$  in  $\alpha_2 = s_3$ ,  $s_3$  in  $\alpha s_3 = \alpha^2 s_1 = s_1$ .

Der Ringweg  $l$  permutiert also  $s_1 s_2 s_3$  cyklisch in  $s_2 s_3 s_1$ . Die gleiche cyklische Permutation  $s_2 s_3 s_1$  von  $s_1 s_2 s_3$  bringt jeder Ringweg hervor, der nur  $a_1$  umschließt.

3°)  $l$  umschließt nur den Verzweigungspunkt  $b_1$ : durchläuft  $z$  diesen Ringweg in der Richtung der wachsenden Winkel, so wächst  $\psi_1$  um  $2\pi$ , während  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_2$  wieder ihre Anfangswerte erreichen. Es geht dann also

$$s_1 \text{ über in } s_1 \cdot e^{-\frac{2\pi i}{3}} = \alpha^2 \cdot s_1 = s_3,$$

und analog  $s_2$  in  $\alpha^2 s_2 = s_1$ ,  $s_3$  in  $\alpha^2 s_3 = s_2$ .

Der Ringweg  $l$  permutiert also  $s_1 s_2 s_3$  cyklisch in  $s_3 s_1 s_2$ . Die gleiche Permutation bringt ein in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufener Ringweg hervor, der nur den Verzweigungspunkt  $b_2$  umschließt.

Ebenso ergibt sich, wenn wir uns die Ringwege immer in positiver Richtung durchlaufen denken:

4°) Ein Ringweg um  $a_1$  und  $a_2$  permutiert  $s_1 s_2 s_3$  cyklisch in  $s_3 s_1 s_2$ ; ein Ringweg um  $a_1$  und  $b_1$  führt jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück, und ebenso jeder Ringweg um  $a_2$  und  $b_2$ , oder um  $a_1$  und  $b_2$ , oder  $a_2$  und  $b_1$  oder um sämtliche vier Verzweigungspunkte  $a_1, a_2, b_1, b_2$ . Analog läßt sich die durch einen Ringweg um  $b_1$  und  $b_2$  oder um je drei Verzweigungspunkte hervorgerufene Permutation von  $s_1 s_2 s_3$  bestimmen.

Zum Schluß wollen wir noch an einem Beispiele nachweisen, daß Koincidenzpunkte nicht notwendigerweise Verzweigungspunkte  $p$  sind.

Beispiel V°) Sei  $s^3 + z^3 - 1 = 0$ .

Die Funktion  $s$  ist dreiwertig. Bezeichnen  $s_1, s_2, s_3$  ihren Wert für ein bestimmtes  $z$ , und setzt man

$$s_1 = -\sqrt{(z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)}, \quad (\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})$$

so ist

$$\begin{aligned} s_2 &= \alpha s_1, \\ s_3 &= \alpha^2 s_1. \end{aligned}$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten:

$$z-1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1},$$

$$z-\alpha = r_2 \cdot e^{i\varphi_2},$$

$$z-\alpha^2 = r_3 \cdot e^{i\varphi_3},$$

wird hieraus:

$$s_1 = -(r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{1}{3}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}$$

und wieder

$$s_2 = \alpha s_1, \quad s_3 = \alpha^2 s_1.$$

Koincidenzen zwischen  $s_1, s_2, s_3$  finden statt in den Punkten  $z=1, \alpha, \alpha^2$ . Wiederholt man die Betrachtungen des vorigen Beispiels, so ergibt sich:

1°) Ringwege, die keinen der drei Verzweigungspunkte umschließen, führen jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück.

2°) Ringwege, die nur einen der drei Verzweigungspunkte umschließen, permutieren  $s_1 s_2 s_3$  cyklisch in  $s_2 s_3 s_1$ , wenn sie von den Variablen  $z$  in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen werden.  $z=1, \alpha, \alpha^2$  sind daher Verzweigungspunkte.

3°) Ringwege, die zwei Verzweigungspunkte umschließen, und in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen werden, permutieren  $s_1 s_2 s_3$  cyklisch in  $s_3 s_1 s_2$ .

4°) Ringwege, welche die drei Verzweigungspunkte umschließen, führen jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück.

Wir untersuchen nun auch noch das Verhalten von  $s$  für  $z=\infty$ . Zu dem Zwecke setzen wir:

$$s = \frac{1}{s'}, \quad z = \frac{1}{z'},$$

wodurch die Grundgleichung in

$$s'^3(z'^3 - 1) - z'^3 = 0$$

übergeht, und untersucht  $s'$  als Funktion von  $z'$  für  $z' = 0$  ( $z = \infty$ ). — Es ist zunächst

$$s'_1 = \frac{1}{s_1} = \frac{z'}{\sqrt[3]{z'^3 - 1}}, \quad s'_2 = \alpha s'_1, \quad s'_3 = \alpha^2 s'_1$$

oder

$$s'_2 = \frac{\alpha}{s_1} = \frac{\alpha^2}{s_2}, \quad s'_3 = \frac{\alpha^2}{s_1} = \frac{\alpha}{s_3}.$$

Für  $z' = 0$  wird  $s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0$  und daher  $s_1 = s_2 = s_3 = \infty$ . Für  $z = \infty$  findet also Wurzelkoincidenz statt. Führt man aber Polarkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} z' &= r \cdot e^{i\varphi}, \\ z' - 1 &= r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, \\ z' - \alpha &= r_2 \cdot e^{i\varphi_2}, \\ z' - \alpha^2 &= r_3 \cdot e^{i\varphi_3}, \end{aligned}$$

so daß z. B.  $s'_1$  sich schreiben läßt in der Form:

$$s'_1 = \frac{r e^{i\varphi}}{(r_1 r_2 r_3) \cdot e^{\frac{1}{3} \frac{i}{3} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}},$$

so erkennt man sogleich: durchläuft  $z'$  einen Ringweg, der  $z' = 0$  umschließt, aber  $z' = 1, \alpha, \alpha^2$  ausschließt, so erreichen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  wieder ihre Anfangswerte, während  $\varphi$  sich um  $2\pi$  ändert.  $s'_1$  und ebenso  $s'_2$  und  $s'_3$  kehren daher auf einem solchen Ringweg zu ihren Anfangswerten zurück. Also führt auch ein Ringweg von  $z$  um  $z = \infty$  jede der drei Wurzeln  $s_1, s_2, s_3$  zu ihrem Anfangswert zurück. Der Punkt  $z = \infty$  ist daher für  $s$  ein dreifacher Punkt ohne Verzweigung.

Dieses Resultat ließe sich auch aus Satz II<sup>o</sup>), § 3 ableiten.

### § 5. Bestimmung der Wurzelkoincidenzen.

Soll die durch die Grundgleichung:

$$I^o) \quad F(s, z) = \varphi_0 \cdot s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_n = 0$$

definierte algebraische Funktion  $s$  von  $z$  genauer untersucht werden, so ist es unbedingt notwendig, zuerst die Zahl, Lage

und Natur ihrer Verzweigungspunkte zu bestimmen. Da aber Verzweigungspunkte nur dann auftreten können, wenn zwei oder mehr Wurzeln  $s$  von  $I^0$ ) für dasselbe  $z$  gleiche Werte annehmen (koincidieren), so muß der Bestimmung der Verzweigungspunkte die der Wurzelkoincidenzen voraus gehen.

Die Grundgleichung  $I^0$ ) besitzt gleiche Wurzeln nur für diejenigen Werte von  $z$ , die neben  $I^0$ ) auch die Gleichung

$$II^0) \quad \frac{\partial F}{\partial s} = n \varphi_0 \cdot s^{n-1} + (n-1) \varphi_1 s^{n-2} + \dots + \varphi_{n-1} = 0$$

befriedigen. Eliminiert man  $s$  zwischen  $I^0$ ) und  $II^0$ ), so ergibt sich eine Gleichung für  $z$ , deren Wurzeln die Koincidenzen liefern.

Übersichtlicher läßt sich diese Elimination in folgender Weise vornehmen. Bezeichnet man die Polynome der Gleichungen  $I^0$ ) und  $II^0$ ) kurz mit  $F$  und  $F'$ , so verschwindet bei gleichzeitigem Verschwinden von  $F$  und  $F'$  auch das Polynom:

$$III^0) \quad F_1 = nF - s \cdot F'.$$

Man erhält die Wurzelkoincidenzen also auch, wenn man  $s$  aus den Gleichungen

$$1^0) \quad F' = n \varphi_0 s^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} = 0,$$

$$2^0) \quad F_1 = \varphi_1 \cdot s^{n-1} + 2\varphi_2 \cdot s^{n-2} + \dots + n\varphi_n = 0$$

eliminiert und die sich ergebende Resultante nach  $z$  auflöst. — Diese Resultante ergibt sich am einfachsten nach der Sylvester'schen\*) sogenannten dialytischen Eliminationsmethode in Determinantenform.

Wir multiplizieren die Gleichung  $1^0$ ) der Reihe nach mit  $s^{n-2}$ ,  $s^{n-3}$ , —  $s$ ,  $s^0$ , die Gleichung  $2^0$ ) ebenso, und sehen die so entstehenden  $2(n-1)$  Gleichungen an als Gleichungen mit den  $2(n-1)$  Unbekannten  $s^{2n-3}$ ,  $s^{2n-4}$ , ...,  $s$ ,  $s^0$ . Die Resultante dieser Gleichungen läßt sich schreiben in der Form:

---

\*) Sylvester, Philosophical Magazine f. 1840. No. 101.

$$3^o) D = \begin{vmatrix} n\varphi_0 & (n-1)\varphi_1 & (n-2)\varphi_2 & \dots & 2\varphi_{n-2} & \varphi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n\varphi_0 & (n-1)\varphi_1 & \dots & 2\varphi_{n-2} & \varphi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n\varphi_0 & (n-1)\varphi_1 & (n-2)\varphi_2 & \dots & \dots & \varphi_{n-1} \\ \varphi_1 & 2\varphi_2 & 3\varphi_3 & \dots & (n-1)\varphi_{n-1} & n\varphi_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 2\varphi_2 & \dots & (n-1)\varphi_{n-1} & n\varphi_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_1 & 2\varphi_2 & 3\varphi_3 & \dots & \dots & n\varphi_n \end{vmatrix}$$

Diese Determinante  $D$  heisst die Discriminante der Grundgleichung  $F=0$ . Für dieselbe gilt der aus der Algebra bekannte

**Satz I<sup>o</sup>)** Die Gleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  hat dann und nur dann mehrfache Wurzeln, wenn ihre Discriminante  $D$  verschwindet.

Will man daher die Wurzelkoincidenzen von  $F=0$  ermitteln, so berechne man  $D$  und löse die Gleichung  $D=0$  nach  $z$  auf. Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Werte von  $z$ , für die zwei oder mehr Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  von  $F=0$  einander gleich werden.

Beispiel: Die Grundgleichung heisse:

$$8zs^3 + 3(1-z)s + (1-z) = 0.$$

Die Discriminante  $D$  dieser Gleichung lautet, in Determinantenform geschrieben:

$$D = \begin{vmatrix} 24z & 0 & 3(1-z) & 0 \\ 0 & 24z & 0 & 3(1-z) \\ 0 & 6(1-z) & 3(1-z) & 0 \\ 0 & 0 & 6(1-z) & 3(1-z) \end{vmatrix},$$

oder, wenn wir entwickeln und von einem Zahlenfaktor 24.108 absehen:

$$D = z(1-z^2)(z+1).$$

Es finden also Wurzelkoincidenzen statt für  $z = -1, 0, +1$ .

Die Discriminante  $D$  einer Gleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$ , in der mindestens ein Koeffizient  $\varphi$  bis zum Grade  $m$  in  $z$

ansteigt, ist, wie die Determinantenform derselben zeigt, in  $z$  höchstens vom Grade  $2m(n-1)$ . Bezeichnet man daher als einfache Koincidenz eine solche, bei der nur zwei gleiche Wurzeln, und nicht mehr als 2-gliedrige Gruppen gleicher Wurzeln oder mehrere Paare gleicher Wurzeln auftreten, so gilt der

**Satz II<sup>o</sup>)** Die Anzahl der einfachen Wurzelkoincidenzen einer Gleichung

$$F(s, z) = 0$$

beträgt höchstens  $2m(n-1)$ .

Bemerkung: Ist das Polynom  $F$  in  $s$  und  $z$  homogen und vom Grade  $n$ , so haben  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  in  $z$  die Grade  $0, 1, 2, \dots, n$ . Die Discriminante  $D$  ist dann in  $z$  vom Grade  $n(n-1)$ .

Das in Satz I<sup>o</sup>) aufgestellte Kriterium ist insofern unvollständig, als es, streng genommen, nur die im Endlichen liegenden Wurzelkoincidenzen liefert. Will man prüfen, ob auch für  $z = \infty$  Koincidenzen auftreten, so hat man nur die unabhängige Variable  $z$  zu ersetzen durch  $\frac{1}{z'}$  und für die neue Gleichung in  $s$  und  $z'$  die Discriminante zu bilden. Hat letztere den Faktor  $z'$ , so hat die ursprüngliche Gleichung Wurzelkoincidenzen für  $z = \infty$ . — Einfacher läßt sich jedoch diese Frage auf folgendem Wege entscheiden.

Statt in der ursprünglichen Gleichung  $F = 0$  zuerst  $z = \frac{1}{z'}$  zu setzen, die Discriminante der neuen Gleichung in  $s$  und  $z'$  zu bilden und dann  $z' = 0$  werden zu lassen, kann man auch die Gleichung  $F = 0$  zuerst durch  $z^m$  dividieren, von der neuen Gleichung

$$\frac{\varphi_0}{z^m} s^n + \frac{\varphi_1}{z^m} s^{n-1} + \dots + \frac{\varphi_n}{z^m} = 0$$

die Discriminante  $D_1$



$$D_1 = \begin{vmatrix} n \frac{\varphi_0}{z^m} & (n-1) \frac{\varphi_1}{z^m} & \dots & 2 \frac{\varphi_{n-2}}{z^m} & \frac{\varphi_{n-1}}{z^m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n \frac{\varphi_0}{z^m} & \dots & \dots & \dots & \frac{\varphi_{n-1}}{z^m} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \frac{\varphi_0}{z^m} & \dots & \dots & \dots & \frac{\varphi_{n-1}}{z^m} \\ \frac{\varphi_1}{z^m} & 2 \frac{\varphi_2}{z^m} & \dots & \dots & n \frac{\varphi_n}{z^m} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\varphi_1}{z^m} & 2 \frac{\varphi_2}{z^m} & \dots & \dots & n \frac{\varphi_n}{z^m} \end{vmatrix}$$

bilden und darin  $z = \infty$  setzen. Da nun

$$D_1 = \frac{D}{z^{2m(n-1)}}$$

ist, so wird  $D_1$  stets und nur dann Null für  $z = \infty$ , wenn der Grad von  $D$  in  $z$  kleiner als  $2m(n-1)$  ist. Dies liefert den Satz:

**Satz III<sup>0</sup>)** Für  $z = \infty$  findet Wurzelkoineidenz statt oder nicht, je nachdem der Grad von  $D$  in  $z$  kleiner oder gleich  $2m(n-1)$  ist.

Beispiel 1<sup>0</sup>) Die Discriminante von

$$8zs^3 + 3(1-z)s + (1-z) = 0$$

ist in  $z$  vom Grade  $4 = 2m(n-1)$ . Im Unendlichen findet daher keine Wurzelkoineidenz statt.

Beispiel 2<sup>0</sup>) Die Gleichung

$$s^3 - 3z^2s + 2z^3 - 2iz^2(z-i)^2 = 0,$$

für welche  $n = 3$ ,  $m = 4$ , also  $2m(n-1) = 16$  ist, hat die Discriminante:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3z^2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3z^2 \\ 0 & -6z^2 & 3[2z^3 - 2iz^2(z-i)^2] & 0 \\ 0 & 0 & -6z^2 & 3[2z^3 - 2iz^2(z-i)^2] \end{vmatrix},$$

**oder entwickelt:**

$$D = -324z^4(z-i)^2(z^2-1).$$

Diese Discriminante ist in  $z$  vom Grade  $8 < 2m(n-1)$ ; im Unendlichen findet daher Wurzelkoincidenz statt, was sich auch leicht durch die Substitution  $s = \frac{1}{s'}$ ,  $z = \frac{1}{z'}$  ergibt. Für  $z = \infty$  oder  $z' = 0$  ist

$$s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0, \text{ d. h. } s_1 = s_2 = s_3 = \infty.$$

Die Discriminante  $D$ , die wir am Anfang dieses Paragraphen in Determinantenform ausgedrückt haben, läßt sich auch in einer in den Wurzeln  $s_1, \dots, s_n$  der Grundgleichung  $F=0$  symmetrischen Form darstellen. — Es ist  $D$  diejenige Funktion der Koeffizienten  $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_n$  von  $F=0$ , deren Verschwinden ausdrückt, daß diese Gleichung gleiche Wurzeln hat oder daß  $F=0$  und  $F'=0$  gemeinsame Wurzeln haben. Verschwindet  $D$ , so wird daher auch das Produkt  $F'(s_1) \cdot F'(s_2) \dots F'(s_n) \equiv 0$ . Wird umgekehrt dieses Produkt gleich 0, so haben  $F=0$  und  $F'=0$  gemeinsame Wurzeln, und es verschwindet auch die Discriminante  $D$ . Es gilt daher der

**Satz IV<sup>o</sup>)** Die Discriminante  $D$  der algebraischen Gleichung  $F(s, z) = 0$  ist bis auf einen von  $s_1 \dots s_n$  unabhängigen Faktor identisch mit dem Produkt

$$F'(s_1) \cdot F'(s_2) \dots F'(s_n),$$

$$\text{wo } F'(s_r) = \left( \frac{\partial F'}{\partial s} \right)_{s=s_r} \text{ ist.}$$

Um diesen Faktor seinem wesentlichen Bestandteile nach zu bestimmen, bezeichnen wir mit  $a_1, a_2 \dots a_n$  die symmetrischen Wurzelfunktionen:

$$a_1 = s_1 + s_2 + \dots + s_n = -\frac{\varphi_1}{\varphi_0},$$

$$a_2 = s_1 s_2 + \dots + s_{n-1} s_n = + \frac{\varphi_2}{\varphi_0},$$

• • • • •

$$a_n = s_1 s_2 \dots s_n = (-1)^n \frac{\varphi_n}{\varphi_0},$$

und setzen die hieraus sich ergebenden Werte

$$\varphi_1 = -\varphi_0 \cdot a_1, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \cdot a_2, \quad \dots \varphi_n = (-1)^n \cdot \varphi_0 \cdot a_n$$

von  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  in den Determinantenausdruck von  $D$  ein. Dies giebt:

$$D = \varphi_0 \cdot 2^{n-2} \cdot H.$$

Die hier auftretende GröÙe  $H$  ist eine ganze Funktion der symmetrischen Wurzelfunktionen  $a_1, \dots, a_n$ , also selbst wieder ganze, symmetrische Funktion von  $s_1, \dots, s_n$  und muß, ebenso wie  $D$ , verschwinden, so oft zwei Wurzeln einander gleich werden. Als ganze Funktion der Wurzeln muß sie daher durch jede Wurzeldifferenz  $(s_i - s_k)$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k$ ) teilbar sein. Als symmetrische Funktion der Wurzeln muß sie jede Wurzeldifferenz zweimal als Faktor enthalten. Es ist daher  $H$ , bis auf einen von den Wurzeln unabhängigen, konstanten Faktor  $C$ , gleich dem Quadrat der sogenannten alternierenden Funktion der Wurzeln:

$$\begin{aligned} \Phi = (s_1 - s_2) (s_1 - s_3) \dots (s_1 - s_n) \\ (s_2 - s_3) \dots (s_2 - s_n) \\ \dots \dots \dots \\ (s_{n-1} - s_n), \end{aligned}$$

d. h.

$$4^0) \quad D = C \cdot \varphi_0^{2^{n-2}} \cdot \Phi^2.$$

Berücksichtigt man andererseits, daß

$$\begin{aligned} F'(s_1) &= \varphi_0 (s_1 - s_2) (s_1 - s_3) \dots (s_1 - s_n), \\ F'(s_2) &= \varphi_0 (s_2 - s_1) (s_2 - s_3) \dots (s_2 - s_n), \\ &\dots \dots \dots \\ F'(s_n) &= \varphi_0 (s_n - s_1) (s_n - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}), \end{aligned}$$

und daher

$$F'(s_1) \cdot F'(s_2) \dots F'(s_n) = \varphi_0^n (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} \cdot \Phi^2$$

ist, so erhält man für  $D$  den Ausdruck:

$$5^0) \quad D = C \cdot (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} \cdot \varphi_0^{n-2} \cdot F'(s_1) \cdot F'(s_2) \dots F'(s_n),$$

wo  $C$  eine von  $s_1, s_2, \dots, s_n$  und  $z$  unabhängige, konstante GröÙe ist. — Auf die Bestimmung des Zahlenwertes von  $C$

gehen wir hier nicht ein, da dieser Wert im folgenden keine Rolle spielt.

Wir wollen nun noch zeigen, wie man im Falle einfacher Koincidenzen mit Hilfe von  $D$  die koincidierenden Wurzeln von  $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  bestimmen kann, ohne diese Gleichung aufzulösen.

Zu dem Zwecke schicken wir einen algebraischen Satz voraus. Es sei

$$\varphi(s, z) = a_0 s^q + a_1 s^{q-1} + \dots + a_q = 0$$

eine algebraische Gleichung,  $s_1 \dots s_q$  ihre Wurzeln,  $D$  ihre Discriminante. Wir bilden das Produkt

$$(s - \sigma) \cdot \varphi(s, z) = a_0 s^{q+1} + \dots$$

und betrachten die Discriminante  $D_1$  desselben. — Nach 4<sup>o</sup>) ist:

$$D_1 = C_1 \cdot a_0^{2q} \cdot \Phi_1^2,$$

wo  $C_1$  eine Konstante und  $\Phi_1$  die alternierende Funktion

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & (\sigma - s_1)(\sigma - s_2) \dots (\sigma - s_q) \\ & (s_1 - s_2) \dots (s_1 - s_q) \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & (s_{q-1} - s_q) \end{aligned}$$

der Wurzeln  $\sigma, s_1, s_2 \dots s_q$  von  $(s - \sigma) \cdot \varphi(s, z) = 0$  bezeichnet. Berücksichtigt man nun, daß

$$\Phi_1 = (\sigma - s_1)(\sigma - s_2) \dots (\sigma - s_q) \cdot \Phi$$

ist, wo  $\Phi$  die alternierende Funktion der Wurzeln von  $\varphi = 0$  bedeutet, so erhält man sogleich aus 4<sup>o</sup>)

$$\frac{D_1}{D} = \frac{C_1 \cdot a_0^{2q} \cdot \Phi^2 \cdot \prod_{x=1}^q (\sigma - s_x)^2}{C \cdot a_0^{2q-2} \cdot \Phi^2},$$

oder

$$6^o) \quad D_1 = \gamma \cdot D \cdot a_0^2 \prod_{x=1}^q (\sigma - s_x)^2,$$

wo  $\gamma$  eine Konstante ist.

Da außerdem

$$a_0 \cdot \prod_{x=1}^q (\sigma - s_x) = \varphi(\sigma, z)$$

ist, so liefert 6<sup>o</sup>) den

**Satz V<sup>o</sup>)** Die Discriminante von  $(s - \sigma) \cdot \varphi(s, z)$  ist, von einem numerischen Faktor abgesehen, gleich  $\varphi(\sigma, z)^2$  mal der Discriminante von  $\varphi(s, z)$ .

Wir nehmen nun an, die Discriminante  $D$  von

$$F = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_n$$

verschwinde für ein bestimmtes  $z$  und es sei  $s_1 = s_2 = \sigma$  die zweimal vorkommende Wurzel; letztere ist dann auch Wurzel der Gleichung

$$\psi(s, z) = \psi_0 s^n + \psi_1 s^{n-1} + \dots + \psi_n = 0,$$

wofern zwischen den  $\psi$  die eine Beziehung

$$7^o) \quad \psi_0 \sigma^n + \psi_1 \sigma^{n-1} + \dots + \psi_n = 0$$

stattfindet. Unter dieser Voraussetzung ist, wenn  $\lambda$  einen beliebigen Parameter bedeutet:

$$F + \lambda \cdot \psi = (s - \sigma) [(s - \sigma) \cdot R(s) + \lambda \cdot R_1(s)],$$

und die Discriminante  $\mathcal{A}$  von  $F + \lambda \psi$  daher, nach Satz V<sup>o</sup>), teilbar durch  $\lambda^2$ . Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = D + \lambda \left( \psi_0 \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_0} + \psi_1 \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_1} + \dots + \psi_n \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_n} \right) \\ + \lambda^2 (\dots) + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $D = 0$  ist, und  $\mathcal{A}$ , wie eben bewiesen, durch  $\lambda^2$  teilbar ist, so muß der Koeffizient von  $\lambda$  in  $\mathcal{A}$  ebenfalls verschwinden, d. h. es ist

$$\varphi_0 \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_0} + \psi_1 \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_1} + \dots + \psi_n \cdot \frac{\partial D}{\partial \varphi_n} = 0.$$

Diese Beziehung muß mit der einen zwischen  $\psi_0 \dots \psi_n$  vorausgesetzten Relation 7<sup>o</sup>) identisch sein; es sind daher die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi_0}, \quad \frac{\partial D}{\partial \varphi_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial D}{\partial \varphi_n}$$

resp. proportional zu  $\sigma^n, \sigma^{n-1}, \dots, 1$ , d. h. man findet den Wert von  $\sigma$  durch Division zweier aufeinander folgenden Differentialquotienten aus der Reihe  $\frac{\partial D}{\partial \varphi_0}, \dots, \frac{\partial D}{\partial \varphi_n}$ . Wir können somit den Satz aussprechen:

**Satz VI<sup>0</sup>)** Besitzt die algebraische Gleichung

$$F(s, z) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_n = 0$$

für ein bestimmtes  $z$  zwei koincidierende Wurzeln  $s_1 = s_2 = \sigma$ , so ist allgemein:

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi_v} : \frac{\partial D}{\partial \varphi_{v+x}} = \sigma^x.$$

Hat die Gleichung  $F=0$  für ein gegebenes  $z$  mehr als zwei gleiche Wurzeln, so führt die im vorigen Satze mitgeteilte Regel nicht mehr zum Ziele. Wir gehen hierauf nicht näher ein und geben nur noch eine Anwendung des Satzes VI<sup>0</sup>) auf ein spezielles Beispiel.

Beispiel. Die durch die Gleichung

$$s^3 - 3z^2s + 2z^3 - 2iz^2(z-i)^2 = 0$$

definierte algebraische Funktion  $s$  hat, wie ihre Discriminante:

$$D = -324 \cdot z^4 (z-i)^2 (z^2-1)$$

zeigt, eine Wurzelkoincidenz für  $z=1$ . Einer der an dieser Stelle stattfindenden Wurzelwerte ist  $=+2$ , ein anderer  $=-1$ ; die Wurzelkoincidenz ist daher eine einfache. Um zu entscheiden, welcher der zwei Werte  $+2$  und  $-1$  an der Koincidenz teilnimmt, entwickeln wir  $D$  nach den Koeffizienten  $\varphi_0=1, \varphi_1=0, \varphi_2=-3z^2, \varphi_3=2z^3-2iz^2(z-i)^2$ ; es ergibt sich:

$$\begin{aligned} D &= 81 \varphi_0^2 \varphi_3^2 + 12 \varphi_0 \varphi_2^3, \\ \frac{\partial D}{\partial \varphi_2} &= 36 \varphi_0 \varphi_2^2, \quad \frac{\partial D}{\partial \varphi_3} = 162 \varphi_0^2 \varphi_3, \\ \frac{\partial D}{\partial \varphi_2} : \frac{\partial D}{\partial \varphi_3} &= \frac{2 \varphi_2^2}{9 \varphi_3} = -1. \end{aligned}$$

Für  $z=1$  hat also die obige Gleichung die Wurzeln:

$$-1, -1, +2.$$

## § 6. Reihenentwicklung der Wurzeln.

Es ist bekannt, welche grofse Rolle in der Theorie der einwertigen Funktionen einer komplexen Variablen  $z$  die Reihenentwicklung dieser Funktionen spielt. Es drängt sich daher von selbst die Frage auf, ob es nicht möglich ist, auch für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung Reihenentwicklungen analoger Art aufzustellen. Die Frage ist bejahend zu beantworten; die Reihenentwicklungen gestalten sich jedoch etwas anders als bei den einwertigen Funktionen, und zwar infolge des Auftretens von Verzweigungspunkten.

Bezeichnet  $z = a$  irgend einen Punkt der komplexen Zahlenebene, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

I<sup>o</sup>) Ein Ringweg, der in unmittelbarer Nähe um  $z = a$  herumläuft, führt jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurück. In diesem Falle verhält sich jede Wurzel  $s$  in der Umgebung von  $z = a$ , wie eine einwertige Funktion, und läßt sich demgemäß entwickeln in einer Reihe von der Form:

$$1^o) \quad s = \sum_x C_x \cdot (z - a)^x,$$

wo die  $x$  ganze Zahlen bedeuten. Wird eine oder mehrere Wurzeln unstetig für  $z = a$ , so treten in den Reihenentwicklungen dieser Wurzeln negative Exponenten  $x$  in endlicher Anzahl auf.

II<sup>o</sup>)  $z = a$  ist ein Verzweigungspunkt, und ein in unmittelbarer Nähe um  $z = a$  herumlaufender Ringweg permutiere in cyklischer Weise die  $\varrho$  Wurzeln  $s_1 \dots s_\nu \dots s_\varrho$ . Führt man eine neue unabhängige Veränderliche  $z'$  ein mit Hilfe der Substitution

$$z - a = z'^\varrho,$$

so beschreibt die frühere Variable  $z$   $n$  Umläufe um den Punkt  $z = a$ , wenn  $z'$  den Punkt  $z' = 0$  einmal umkreist. Da aber  $n$  aufeinander folgende Umläufe von  $z$  um  $z = a$  jede Wurzel wieder zu ihrem Anfangswerte zurückführen, so folgt: die Wurzeln  $s_1 \dots s_\varrho$  sind, als Funktionen von  $z'$  aufgefaßt, in der Umgebung des Punktes  $z' = 0$  einwertig, lassen sich also entwickeln in einer Reihe von der Form:

$$s = \sum_x C_x \cdot z'^x.$$

Geht man wieder zur ursprünglichen Variablen  $z$  zurück, so erhält man für  $s_1 \dots s_\varrho$  die gemeinsame Entwicklungsform:

$$2^\circ) \quad s = \sum_x C_x \cdot (z - a)^{\frac{x}{\varrho}}.$$

Die in  $2^\circ)$  auftretenden Koeffizienten  $C_x$  haben dieselben Werte in den Entwicklungen der  $\varrho$  Wurzeln, die den  $\varrho$ -gliedrigen Cyklus bilden. Ist  $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{\varrho}}$  und  $r$  einer der  $\varrho$  Werte von  $(z - a)^{\frac{1}{\varrho}}$ , so erhält man aus der für den ganzen Cyklus gültigen Entwicklung  $2^\circ)$  für die einzelnen Wurzeln dieses Cyklus die Entwicklungen:

$$\sum_x C_x \cdot r^x, \sum_x \alpha \cdot C_x \cdot r^x, \sum_x \alpha^2 C_x \cdot r^x, \dots \sum_x \alpha^{\varrho-1} C_x \cdot r^x.$$

Werden in  $z = a$  die  $\varrho$  Wurzeln  $s_1 \dots s_\varrho$  unstetig, so treten in den Reihenentwicklungen dieser Wurzeln negative Exponenten  $x$  in endlicher Anzahl auf.

Für diejenigen Wurzeln, die durch einen Umlauf von  $z$  um den Verzweigungspunkt  $z = a$  wieder zu ihrem Anfangswert zurückgeführt werden, gelten wie im Fall  $1^\circ)$  Entwicklungen von der Form:

$$s = \sum_x C_x (z - a)^x,$$

wo möglicherweise wieder negative Exponenten  $x$  in endlicher Anzahl auftreten.

Alle Entwicklungen von den Formen  $1^\circ)$  oder  $2^\circ)$  haben ihr besonderes Konvergenzgebiet. Denkt man sich in der  $z$ -Ebene alle singulären Punkte (Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte) von  $s$  markiert und um  $z = a$  als Mittelpunkt einen Kreis  $K$  beschrieben, dessen Peripherie durch den  $z = a$  am nächsten liegenden singulären Punkt geht, so ist die für irgend eine Wurzel  $s$ , gültige Entwicklung, sei sie nun von der Form  $1^\circ)$  oder  $2^\circ)$ , innerhalb  $K$  konvergent. Reicht die Konvergenz der Entwicklung über  $K$  hinaus, so können die auf  $K$  liegenden Singularitäten keine Singularitäten von  $s$ , sein.

Kennt man den Wert, den eine Wurzel  $s$ , einer algebraischen Gleichung in einem nicht singulären Punkte  $z = a$



der  $z$ -Ebene besitzt, so läßt sich mit Hilfe der Reihenentwicklung von  $s$ , in der Umgebung dieses Punktes der Wert berechnen, den  $s$ , erreicht, wenn der Punkt  $z$  auf einem Wege, der allen Singularitäten von  $s$ , ausweicht, von  $z = a$  nach einen Punkt  $z = b$  geht. Das Verfahren, das von Puiseux herrührt (Puiseux-Fischer: Untersuchungen über algebraische Funktionen, p. 17—18), ist genau dasselbe, das auch bei den einwertigen Funktionen benutzt wird. Es liefert die stetige Fortsetzung von  $s$ .

Die in diesem Paragraphen für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung nachgewiesenen Formen der Reihenentwicklung in der Umgebung eines Punktes  $z = a$  sind von gänzlich verschiedener Art, je nachdem der Punkt  $z = a$  ein Verzweigungspunkt ist oder nicht. Ist  $z = a$  für eine Wurzel  $s$ , kein Verzweigungspunkt, so schreitet die Entwicklung fort nach ganzen Potenzen von  $z - a$ . Ist  $z = a$  ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $\varrho$ , und  $s$ , eine der Wurzeln des zugehörigen  $\varrho$ -gliedrigen Cyklus, so schreitet die Entwicklung von  $s$ , fort nach ganzen Po-

tenzen von  $(z - a)^{\frac{1}{\varrho}}$ . Dieser wesentliche Unterschied in der Form der Reihenentwicklung kann hinwieder dazu dienen, um zu untersuchen, ob ein Punkt, in dem mehrere Wurzeln koincidieren, ein Verzweigungspunkt ist und von welcher Ordnung derselbe ist, oder ob er ein mehrfacher Punkt ist, ohne Verzweigung. Gelingt es, für einen Wurzelkoincidenzpunkt  $z = a$  die Entwicklung der daselbst gleich werdenden Wurzeln wenigstens in ihren Anfangsgliedern festzustellen, so liefern uns die Exponenten von  $z - a$  so gleich Aufschluß über die Natur des Punktes  $z = a$ . — Im nächsten Paragraphen soll eine Methode dargelegt werden, um wenigstens die Anfangsglieder dieser Reihenentwicklungen zu bestimmen.

### § 7) Bestimmung der Reihenentwicklungen nach Puiseux.

Die im Folgenden auseinanderzusetzende Methode ist zuerst ausführlich behandelt worden von Puiseux (Puiseux-Fischer, 2. Teil, p. 24 ff.) und reicht in ihren Grundzügen bis auf Newton zurück.



Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Größen  $v$  und  $\eta$  zu berechnen, und zwar wird es, wenn wir nur die Anfangsglieder der Entwicklung von  $s$  haben wollen, genügen, die angenäherten Werte von  $v$  und  $\eta$  zu bestimmen.

Für  $z = a$  wird  $z' = 0$ , also auch  $\eta = 0$ . In der unmittelbaren Nachbarschaft von  $z = a$ , d. h. von  $\eta = 0$  ist daher angenähert:

$$3^o) \quad A + B v^x = 0.$$

Diese Gleichung liefert, da  $A$  und  $B \neq 0$  sind,  $x$  endliche Werte für  $v$ , nämlich die  $x$  Werte der Wurzel

$$\sqrt[x]{-\frac{A}{B}}.$$

Bezeichnet  $v_1$  einen der Werte dieser Wurzel, so ist

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{x}}, \\ v_3 &= v_2 \cdot e^{\frac{2\pi i}{x}}, \\ &\dots \dots \dots \frac{2\pi i}{x} \\ v_x &= v_{x-1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{x}}, \end{aligned}$$

und, in erster Annäherung:

$$s'_\lambda = v_\lambda \cdot \eta = v_\lambda \cdot z'^{\frac{1}{x}}, \quad (\lambda = 1, 2 \dots x).$$

Durch einen positiven Umlauf von  $z'$  um  $z' = 0$  geht  $z'^{\frac{1}{x}}$  über in  $z'^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{x}}$  und

$$s'_\lambda \text{ in } v_\lambda \cdot e^{\frac{2\pi i}{x}} \cdot z'^{\frac{1}{x}} = v_{\lambda+1} \cdot z'^{\frac{1}{x}} = s'_{\lambda+1}.$$

Die  $x$  Wurzeln  $s'_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2 \dots x$ ), und ebenso die im Punkte  $z = a$  coincidierenden Wurzeln  $s_1 \dots s_x$  bilden daher einen  $x$ -gliedrigen Cyklus; wir haben somit den

**Satz I<sup>o</sup>)** Hat die niedrigste Potenz, zu der  $z'$  in den von  $s$  unabhängigen Gliedern der Gleichung 1<sup>o</sup>) vorkommt, den Exponenten 1, so ist der Punkt  $z = a$  ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $x$ ;



Gleichungspolynoms  $2^0$ ) repräsentiert durch einen Punkt  $P$  mit Koordinaten, die den Exponenten von  $z'$  und  $s'$  in diesem

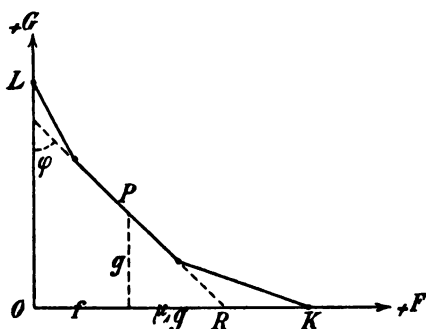


Fig. 10.

Gliede gleich sind. Einem Gliede  $A_{45} z'^4 s'^5$  würde auf diese Weise ein Punkt mit der Abscisse  $f=4$  und der Ordinate  $g=5$  entsprechen. Die Punkte  $K$  und  $L$  sind die Repräsentanten von  $A z'^k$  und  $B s'^k$ .

Um  $c_1$  und  $\mu_1$  zu bestimmen, setzen wir nun  $2^0$ ) in erster Annäherung:

$$s' = c_1 \cdot z'^{\mu_1},$$

so daß ein beliebiges Glied  $A_{fg} z'^f s'^g$  von  $2^0$ ) nunmehr  $z'$  zur Ordnung  $\mu_1 g + f$  enthält. Denken wir uns durch den dieses Glied repräsentierenden Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $f, g$  eine Gerade gelegt, welche die Ordinatenachse  $OG$  unter einem solchen Winkel  $\varphi$  trifft, daß  $\tan \varphi = \mu_1$  ist, so schneidet diese Gerade auf der Abscissenachse  $OF$  ein Stück  $OR = \mu_1 g + f$  ab. Bedeutet ferner  $A_{f'g'} z'^{f'} s'^{g'}$  ein anderes Glied von  $2^0$ ), das nach Ausführung der Substitution  $s' = c_1 z'^{\mu_1}$  in  $z'$  vom Grade  $\mu_1 g' + f' = \mu_1 g + f$  ist, und denkt man sich durch den dieses Glied repräsentierenden Punkt  $P'$  mit den Koordinaten  $f', g'$  eine Gerade so gelegt, daß sie mit  $OG$  einen Winkel  $\varphi'$  bildet, dessen Tangente ebenfalls gleich  $\mu_1$  ist, so ist  $\varphi' = \varphi$  und die Gerade schneidet auf  $OF$  ein Stück  $\mu_1 g' + f' = \mu_1 g + f$  ab. Diese letztere Gerade fällt also mit der ersteren durch  $P$  gehenden zusammen. Alle Glieder von  $2^0$ ), die nach Ausführung der Substitution  $s' = c_1 z'^{\mu_1}$  in  $z$  von demselben Grade sind, werden daher durch Punkte  $P$  repräsentiert, die auf einer und derselben Geraden liegen. Da ferner die Gleichheit

$$\mu_1 g + f = \mu_1 g' + f'$$

bei gleichem  $\mu_1$ , für  $f' < f$  nur bestehen kann, wenn  $g' > g$  ist, so muß eine solche Gerade sowohl die positive Ab-

scissen — als die positive Ordinatenachse schneiden, also von der positiven  $f$ -Achse nach der positiven  $g$ -Achse ansteigen.

Vom Punkt  $L$  ausgehend, denken wir uns nun eine Gerade, die zuerst mit  $LO$  zusammenfällt; wir drehen dieselbe um  $L$  in der der Drehung der Uhrzeiger entgegengesetzten Richtung, bis sie zum erstenmale einen der Punkte  $P$  trifft; hierauf drehen wir sie durch den letzten Punkt, der in ihrer Richtung liegt, etwa  $P_j$ , bis sie zuerst wieder durch einen anderen Punkt  $P$  geht, und so fort, bis wir schliesslich zu einer Geraden kommen, die durch  $K$  geht. Auf diese Weise entsteht ein polygonaler Linienzug, der seine konvexe Seite dem Koordinatenanfangspunkt zukehrt. Die einzelnen Stücke dieses Zuges nennen wir die Seiten desselben. Jede Seite beginnt und endigt mit einem Punkte  $P$ , und ausserdem können auf ihr noch weitere Punkte dieser Art liegen. — Es gilt nun offenbar Folgendes:

- 1°)  $\mu_1$  kann soviel Werte annehmen als der Polygonzug Seiten hat;
- 2°) der einer Seite entsprechende Wert von  $\mu_1$  ist die Tangente des Winkels, den diese Seite mit der Achse  $OG$  bildet;
- 3°) zur Bestimmung des Anfangsgliedes der Reihenentwicklung von  $s'$  nach Potenzen von  $z'$  hat man bei jeder Seite des Polygonzuges diejenigen Glieder von 2 b) zu berücksichtigen, deren repräsentierende Punkte  $P$  auf dieser Seite liegen.

Liegen auf einer Seite  $\sigma$  Punkte  $P_q$  ( $q = 1, 2 \dots \sigma$ ), so ist für diese Seite:

$$\mu_1 g_1 + f_1 = \mu_1 g_2 + f_2 = \dots = \mu_1 g_q + f_q = \dots = \mu_1 g_\sigma + f_\sigma$$

oder

$$4^0) \quad \mu_1 = \frac{f_1 - f_2}{g_2 - g_1} = \dots = \frac{f_1 - f_q}{g_q - g_1} = \dots = \frac{f_1 - f_\sigma}{g_\sigma - g_1} = \frac{r}{q},$$

wo  $r$  prim sei zu  $q$ .

Ist  $g_1$  die kleinste,  $g_\sigma$  die grösste aller Ordinaten der  $\sigma$  Punkte  $P_q$  auf der betreffenden Seite, ist also

$$A_{f_\sigma g_\sigma} z'^{f_\sigma} s'^{g_\sigma} + \sum_{q \neq 1, \sigma} \sum_{\sigma} A_{f_q g_q} z'^{f_q} s'^{g_q} + A_{f_1 g_1} z'^{f_1} s'^{g_1}$$

mit Hilfe eines neuen Polygons und erhalten so den Wert von  $\mu'_2 \left( = \frac{r_2}{q_2} \right)$  und eine Gleichung für  $c_2^{q_2}$ . Es ist dann in 2. Annäherung:

$$s' = (c_1 + c_2 \cdot z_1^{\mu'_2}) z_1^r,$$

oder:  $s' = (c_1 + c_2 z_1^{\mu'_2}) \cdot z_1^{\mu'_1}$ , wo  $\mu_2 = \frac{\mu'_2}{q}$ .

Hat die für  $c_2^{q_2}$  gefundene Gleichung nur ungleiche Wurzeln, so sind nun die  $t_\sigma$  der betreffenden Seite des ersten Polygons zugeordneten  $q$ -gliedrigen Wurzelcyklen von einander getrennt; hat diese Gleichung wieder gleiche Wurzeln, so muß man zur Bestimmung weiterer Glieder der Reihenentwickelungen fortschreiten. — So setzt sich das fort, bis man schliesslich zu einer Gleichung in  $c_r^{q_r}$  mit lauter ungleichen Wurzeln kommt.

Bei der praktischen Anwendung der vorigen Methode fängt man am bequemsten mit derjenigen Seite des Polygonzuges an, deren Anfangspunkt der Punkt  $L$  der Ordinatenachse ist, und nimmt hierauf der Reihe nach die übrigen Seiten vor.

Ist für eine Seite mit der Ordinatendifferenz  $g_\sigma - g_1$  der Wert von  $\mu_1$  eine ganze Zahl, so ist  $q = 1$  und  $t_\sigma = g_\sigma - g_1$ . Die dieser Seite entsprechenden  $g_\sigma - g_1$  Zweige von  $s$  bilden dann für  $z = a$   $t_\sigma$  eingliedrige Cyklen, d. h. der Punkt  $z = a$  ist für diese  $g_\sigma - g_1 = t_\sigma$  Zweige ein  $t_\sigma$ -facher Punkt ohne Verzweigung.

In den bisherigen Ausführungen ist stillschweigend angenommen worden, daß  $s$  im Koincidenzpunkt  $z = a$  lauter endliche zusammenfallende Wurzelwerte besitzt. Werden für  $z = a$  mehrere Wurzeln  $\infty$ , so führt die vorige Methode, nach Anwendung der Substitution  $s = \frac{1}{z'}$  immer noch zum Ziel. Liegt eine Wurzelcoincidenz im Unendlichen, so wendet man, wenn kein  $s = \infty$  wird, die Substitution  $z = \frac{1}{z'}$ , und wenn mehrere  $s$  unendlich werden, die Substitution  $s = \frac{1}{s'}$ ,  $z = \frac{1}{z'}$  an und verfährt dann wie vorhin.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß das im Vorigen auseinandergesetzte Verfahren die Reihenentwicklungen der einzelnen Wurzeln auch liefert für den Fall, daß  $\kappa = 1$  ist, d. h. für Punkte, in denen keine Koincidenz stattfindet. Ebenso liefert es für eine Koincidenzstelle nicht nur die Entwicklungen der  $\kappa$  Wurzeln, die dort gleich werden, sondern auch diejenigen der  $n - \kappa$  Wurzeln, die an der Koincidenz nicht beteiligt sind.

## § 8. Beispiele zur Puiseux'schen Methode.

Beispiel 1<sup>o</sup>) Es sei

$$F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = a(s - s_0)^6 + b(s - s_0)^4(z - z_0)^3 + c(s - s_0)^3 + d(z - z_0)^7 = 0.$$

Für  $z = z_0$  hat diese Gleichung drei von einander verschiedene Wurzeln

$$s_0 - \sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \quad s_0 - \alpha \sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \quad s_0 - \alpha^2 \sqrt[3]{\frac{c}{a}}, \quad (\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})$$

und drei zusammenfallende Wurzeln mit dem gemeinsamen Werte  $s = s_0$ .

Die Substitution

$$s - s_0 = s', \quad z - z_0 = z'$$

liefert

$$as'^6 + bs'^4z'^3 + cs'^3 + dz'^7 = 0,$$

woraus sich die zur Bestimmung der Anfangsglieder der Reihenentwicklung der 3 koineidierenden Wurzeln dienende Gleichung 2<sup>o</sup>) ergibt:

$$cs'^3 + dz'^7 = 0.$$

Die 2 Glieder des Polynoms dieser Gleichung werden dargestellt durch die Punkte  $L$  und  $K$  (Fig. 11). Das Polygon hat also nur eine Seite. Setzt man:

$$s' = c_1 \cdot z'^{\mu_1},$$



so ergibt die graphische Darstellung für  $\mu_1$  sogleich den Wert

$$\mu = \frac{7}{3}.$$

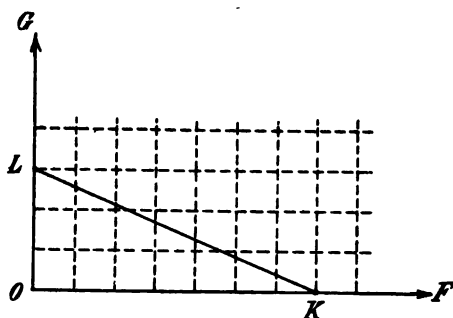


Fig. 11.

Mit Benutzung desselben erhält man für  $c_1$  die Gleichung:

$$c \cdot c_1^3 z'^7 + dz'^7 = 0,$$

oder nach Division durch  $z'^7$ :

$$cc_1^3 + d = 0.$$

Dies gibt für  $c_1$  die 3 von einander verschiedenen Werte:

$$-\sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \quad -\alpha \sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \quad -\alpha^2 \sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \quad (\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}).$$

Die 3 für  $z = z_0$  zusammenfallenden Wurzeln bilden einen 3-gliedrigen Cyklus mit der Entwicklung:

$$s = s_0 + c_1 (z - z_0)^{\frac{7}{3}} + \dots$$

Vergleicht man diese Ableitung mit der von Herrn Königsberger (Ellipt. Funktionen, pag. 195—198), so sieht man, daß die Methode Puiseux's, trotzdem sie mehr den Charakter einer Versuchsmethode trägt, unter Umständen viel rascher zum Ziel führt, als die von Herrn Königsberger entwickelte.

**Beispiel 2<sup>o</sup>)** Es sei

$$F = 8zs^3 + (1 - z)3s + (1 - z) = 0.$$

Diese Gleichung hat, wie in § 5) nachgewiesen wurde, Wurzelkoincidenzen nur für  $z = -1, 0, +1$ . Wir diskutieren hier nur die Wurzelkoincidenz für  $z = 0$ ; die in diesem Punkte stattfindenden Wurzelwerte sind

$$s_1 = s_2 = \infty, \quad s_3 = -\frac{1}{3}.$$

Wir setzen zunächst  $s = \frac{1}{\sigma}$  und erhalten:

$$8z + \sigma^3 + 3\sigma^2 - z\sigma^3 - 3z\sigma^2 = 0,$$

wo nun für  $z = 0$  die Wurzelwerte  $\sigma = 0, 0_1 = 3$  stattfinden.

Die Substitution  $z = z', \sigma = \sigma'$  giebt die Gleichung 2<sup>o</sup>) in der Form:

$$8z' + 3\sigma'^2 = 0.$$

Die zwei für  $z = 0$  zusammenfallenden Wurzeln  $\sigma'$ , und also auch ihre reciproken Werte  $s$ , bilden daher einen 2-gliedrigen Cyklus, d. h. es ist  $\mu_1 = \frac{1}{2}$ , wie übrigens auch aus der graphischen Darstellung folgt.

Substituiert man

$$\sigma' = c_1 z'^{\frac{1}{2}}$$

in

$$8z' + 3\sigma'^2 = 0,$$

so erhält man für  $c_1$ , nach Division durch  $z'$ , die Gleichung:

$$c_1^2 = -\frac{8}{3}, \quad \text{oder } c_1 = \pm i \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Für die an dem 2-gliedrigen Cyklus teilnehmenden Wurzeln  $s_1, s_2$  ergibt sich daher die Entwicklung:

$$s_1 = i \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} + \dots,$$

$$s_2 = -i \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot z^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

Um auch für die Wurzel  $s_3$ , die für  $z=0$  den Wert  $-\frac{1}{3}$  besitzt, die Reihenentwicklung zu gewinnen, setzen wir

$$s = -\frac{1}{3} + s', \quad z = z'$$

und erhalten die Gleichung  $2_0^0$ ) in der Form:

$$3s' - \frac{8}{27}z' = 0.$$

Es ist also

$$\mu_1 = 1,$$

und die Substitution

$$s' = c_1 z'$$

gibt für  $c_1$ :

$$3c_1 z' - \frac{8}{27}z' = 0,$$

d. h.

$$c_1 = \frac{8}{81}.$$

Für  $s_3$  gilt daher in der Umgebung von  $z=0$  die Entwicklung:

$$s_3 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{81}z + \dots$$

**Beispiel 3<sup>0</sup>)** Es sei

$$F = s^3 - 3z^2s + 2z^3 - 2iz^2(z-i)^2 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt (siehe § 5) Wurzelkoincidenzen für  $z = \infty, 0, 1, i, -1$ . Wir betrachten hier nur die in  $z=i$  stattfindende Koincidenz  $s_1 = s_2 = i$ ,  $s_3 = -2i$ .

Setzt man

$$s = i + s', \quad z = i + z',$$

so geht die Grundgleichung über in:

$$s'^3 + 3i \cdot s'^2 - 3z'^2s' - 6iz's' + 5iz'^2 + 6z'^3 - 2iz'^4 = 0,$$

und die entsprechende Gleichung  $2_0^0$ ) lautet:

$$3s'^2 - 6z's' + 5z'^2 = 0.$$

Die graphische Darstellung (siehe Fig. 12) liefert für die Glieder dieser Gleichung die 3 in gerader Linie liegenden Punkte  $L, M, K$ . Das Polygon hat also nur eine Seite; es kann daher auch  $\mu_1$  nur einen Wert annehmen, und zwar ist:

$$\mu_1 = \tan \varphi = \frac{2}{2} = 1.$$

Setzt man nun

$$s_1 = c_1 z'^{\mu_1} = c_1 z',$$

so ergibt sich zur Berechnung von  $c_1$  die Gleichung:

$$c_1^2 z'^2 - 2z' \cdot c_1 z' + \frac{5}{3} z'^2 = 0,$$

oder

$$c_1^2 - 2c_1 = -\frac{5}{3},$$

so daß

$$c_1 = 1 \pm i \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Aus  $\mu_1 = 1$  folgt: die 2 Wurzeln  $s_1, s_2$ , die für  $z = i$  koineidieren, bilden keinen Cyklus, d. h. es ist  $z = i$  ein Doppelpunkt ohne Verzweigung. Die Entwicklungen von  $s_1, s_2$  lauten:

$$s_1 = i + \left(1 + i \sqrt{\frac{2}{3}}\right)(z - i) + \dots,$$

$$s_2 = i + \left(1 - i \sqrt{\frac{2}{3}}\right)(z - i) + \dots$$

Für die Wurzel  $s_3$ , die in  $z = i$  den Wert  $s_3 = -2i$  besitzt, erhält man leicht die Entwicklung:

$$s_3 = -2i - 2(z - i) + \dots$$

**Beispiel 4<sup>o</sup>)** Es sei: (Harkness u. Morley, Theory of Functions pag. 150)

$$(s^2 - z^2)^2 - sz^2 - z^4 = 0.$$

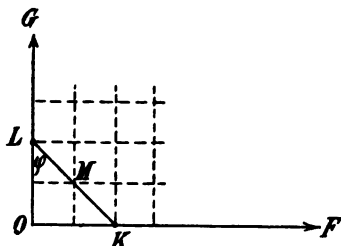


Fig. 12.

Diese Gleichung hat für  $z \equiv 0$  vier gleiche Wurzeln mit dem gemeinsamen Werte  $s = 0$ . Die Substitution  $s = s'$ ,  $z = z'$  läßt die Form der Gleichung un geändert; es ergibt sich als Gleichung 2<sup>o</sup>):

$$s'^4 - 2z's'^2 + z'^2 = 0.$$

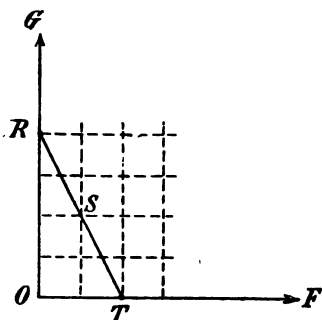


Fig. 13.

Die graphische Darstellung hiervon (Fig. 13) liefert die 3 in gerader Linie liegenden Punkte  $R, S, T$ , so daß:

$$\mu_1 = \tan \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Für  $c_1$  ergibt die Substitution  $s' = c_1 \cdot z'^{\frac{1}{2}}$  die Gleichung:

$$(c_1^2 - 1)^2 = 0,$$

welche für  $c_1^2$  2 Wurzeln mit dem gemeinsamen Werte  $c_1^2 = +1$  liefert. Die 4 Wurzeln  $s_1, s_2, s_3, s_4$  der Grundgleichung bilden daher im Punkte  $z = 0$  zwei Cyklen mit demselben Anfangsglied  $c_1 z'^{\frac{1}{2}}$  ( $c_1 = \pm 1$ ). •

Um diese Cyklen von einander zu trennen, müssen wir weitere Glieder der Reihenentwicklung bestimmen.

Zu dem Zwecke setzen wir in der ursprünglichen Gleichung in  $s'$ :

$$s' = (c_1 + \zeta_1) z'^{\mu_1} = (c_1 + \zeta_1) z'^{\frac{1}{2}}, \text{ wo } \zeta_1 = 0 \text{ für } z' = 0.$$

Dies giebt, nach Division durch  $z'^2$ :

$$\zeta_1^4 + 4c_1\zeta_1^3 + 4\zeta_1^2 - z'\zeta_1 - c_1z'^{\frac{1}{2}} - z'^2 = 0,$$

oder, wenn wir noch setzen:  $z' = z_1^2$ :

$$\zeta_1^4 - 4c_1\zeta_1^3 + 4\zeta_1^2 - z_1^2\zeta_1 - c_1z_1 - z_1^4 = 0.$$

Die zugehörige Gleichung 2 b<sup>o</sup>) lautet:

$$4\zeta_1^2 - c_1z_1 = 0.$$

Setzt man hierin

$$\zeta_1 = c_2 \cdot z'^{\mu_2} = c_2 z_1^{2\mu_2},$$

so liefert die graphische Darstellung (Fig. 14<sup>0</sup>):

$$2\mu_2 = \tan \varphi = \frac{1}{2}, \text{ d. h. } \mu_2 = \frac{1}{4},$$

und die Gleichung für  $c_2$  wird:

$$4c_2^2 - c_1 = 0,$$

oder  $4c_1 c_2^2 = c_1^2 = 1,$

so dafs:

$$c_2 = \frac{1}{2\sqrt{c_1}}.$$

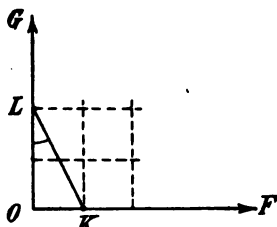


Fig. 14.

In zweiter Annäherung erhalten wir also:

$$s' = c_1 z'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{c_1}} z'^{\frac{3}{2}} + \dots$$

und die Reihenentwicklungen der 4 Wurzeln in der Umgebung von  $z=0$  lauten:

$$s_1 = z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} + \dots,$$

$$s_2 = -z^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} i z^{\frac{3}{4}} + \dots,$$

$$s_3 = z^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} + \dots,$$

$$s_4 = -z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} i z^{\frac{3}{4}} + \dots$$

Der eine Cyklus enthält die Wurzeln  $s_1$  und  $s_3$ , der andere die Wurzeln  $s_2$  und  $s_4$ .

Die vorigen Beispiele mögen genügen, um die praktische Durchführung der Puiseux'schen Methode in speziellen Fällen zu erläutern.

## § 9. Normalisierung der Grundgleichung.

In den bisherigen Untersuchungen ist über die Grundgleichung:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) &= \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots & + \varphi_n \\ &= \psi_0 \cdot z^m + \psi_1 z^{m-1} + \dots & + \psi_m = 0 \end{aligned}$$

weiter keine Voraussetzung getroffen worden, als die, daß sie irreducibel sei. Wie wir an speziellen Beispielen gesehen haben, kann dann die durch  $F=0$  definierte algebraische Funktion  $s$  von  $z$  mehr oder minder komplizierte Singularitäten aufweisen. Es können z. B. Unstetigkeitspunkte mit Wurzelkoincidenzen zusammenfallen, sei es, daß für einen und denselben Wert von  $z$  mehrere Wurzeln  $s$  unendlich werden, oder daß eine Wurzel  $\infty$  wird für einen Wert von  $z$ , für den mehrere andere Wurzeln gleiche endliche Werte annehmen. Es können auch Wurzelkoincidenzen, mit oder ohne Verzweigung, mit oder ohne Unstetigkeit, im Unendlichen liegen (für  $z=\infty$  stattfinden). Es liegt auf der Hand, daß solche Singularitäten die Untersuchung der mit ihnen behafteten Funktion  $s$  erschweren, und es stellt sich damit zugleich die Aufgabe, die definierende Grundgleichung so umzuformen, daß die Singularitäten von möglichst einfacher Natur werden. — Ein erster Schritt zur Lösung dieser Aufgabe geschieht durch die Entwicklungen des gegenwärtigen Paragraphen.

In die Grundgleichung  $F=0$  führen wir mit Hilfe der Substitution

$$S.: \quad s = \frac{s_0 \cdot \eta}{\eta - \eta_0}, \quad z = \frac{z_0 \cdot \zeta}{\zeta - \zeta_0}$$

zwei neue Variablen  $\eta$  und  $\zeta$  ein;  $\eta_0$  und  $\zeta_0$  sollen beliebig sein,  $s_0$  und  $z_0$  sind Parameter, über die wir in geeigneter Weise verfügen werden. Durch diese Substitution  $S$  geht  $F=0$ , nach Weghebung der Nenner, in eine neue Gleichung

$$\Phi\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ \eta, \zeta \end{smallmatrix}\right) = 0,$$

über, wo das Polynom  $\Phi = g_0 \eta^n + g_1 \eta^{n-1} + \dots + g_n$   
 $= h_0 \zeta^m + h_1 \zeta^{m-1} + \dots + h_m$  sei.

Ist  $F=0$  irreducibel, so ist auch  $\Phi=0$  irreducibel. Wäre nämlich  $\Phi=0$  rational zerfällbar, so würde die zu  $S$  inverse Substitution:

$$S^{-1}: \quad \eta = \frac{\eta_0 \cdot s}{s - s_0}, \quad \zeta = \frac{\zeta_0 \cdot z}{z - z_0},$$

auf  $\Phi=0$  angewendet, umgekehrt wieder eine rationale Zerfällung von  $F=0$  liefern.

Die Discriminante von  $F$ , wenn  $s$  als Funktion von  $z$  betrachtet wird, heiße wie bisher  $D$ . Betrachtet man  $z$  als Funktion von  $s$ , so besitzt  $F$  eine zweite Discriminante  $E$ , die, gleich Null gesetzt, die Werte von  $s$  liefert, fur welche die Funktion  $z$  Wurzelkoincidenzen aufweist. Diese Discriminante  $E$  setzt sich aus den Koeffizienten  $\psi_0, \psi_1 \dots \psi_m$  ebenso zusammen, wie  $D$  aus  $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_m$ , und ihr Grad in  $s$  ist  $\leq 2n(m-1)$ .

Ebenso besitzt  $\Phi$  zwei Discriminanten; sie mogen in entsprechender Bezeichnung  $\mathcal{A}$  und  $H$  heißen.

Den Substitutionsparametern  $s_0, z_0$  legen wir nun folgende Beschränkungen auf:

A) Beschränkungen fur  $z_0$ :

- I<sup>o</sup>)  $z_0$  soll weder Wurzel von  $\varphi_0=0$ , noch von  $D=0$  sein;
- II<sup>o</sup>)  $z=z_0$  soll, als Funktion von  $s$  betrachtet, keine mehrfache Wurzel von  $F=0$  sein;
- III<sup>o</sup>)  $z=z_0$  soll, als Funktion von  $s$  betrachtet, in keinem Wurzelsystem  $z_1, z_2 \dots z_m$  vorkommen, in dem zwei oder mehr gleiche Wurzeln  $z$  auftreten.

B) Beschränkungen fur  $s_0$ :

- I<sup>o</sup>)  $s_0$  soll weder eine Wurzel von  $\psi_0=0$ , noch von  $E=0$  sein;
- II<sup>o</sup>)  $s=s_0$  soll keine mehrfache Wurzel von  $F=0$  sein;
- III<sup>o</sup>)  $s=s_0$  soll in keinem Wurzelsystem  $s_1, s_2 \dots s_m$  vorkommen, in dem zwei oder mehr gleiche Wurzeln  $s$  auftreten.

C) Gemeinsame Beschränkung fur  $z_0$  und  $s_0$ :

Es soll nicht  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s_0, & z_0 \end{smallmatrix}\right) = 0$  sein. —



Die Beschränkungen A<sup>o</sup>) und B<sup>o</sup>) schliessen für  $s_0, z_0$  nur eine endliche Anzahl von Werten aus. Den Beschränkungen A<sup>o</sup>), B<sup>o</sup>) und C<sup>o</sup>) kann man also auf unendlich viele Arten gerecht werden.

Welches ist nun die Wirkung dieser Beschränkungen?

Für  $z = z_0$  wird  $\zeta = \infty$ , für  $s = s_0$  wird  $\eta = \infty$ . Die Beschränkung C<sup>o</sup>) hat daher zur Folge, dass für  $\zeta = \infty$  kein  $\eta$  unstetig wird, und umgekehrt, dass für  $\eta = \infty$  kein  $\zeta$  unstetig wird.

Die Beschränkung A<sup>o</sup>) I<sup>o</sup>) hat zur Folge, dass für  $\zeta = \infty$  keine Wurzel  $\eta = \eta_0$  wird, und keine zwei Wurzeln  $\eta$  einander gleich werden.

Die Beschränkung B<sup>o</sup>) I<sup>o</sup>) bewirkt, dass für  $\eta = \infty$  keine Wurzel  $\zeta = \zeta_0$  wird, und keine zwei Wurzeln  $\zeta$  einander gleich werden.

Die Beschränkung B<sup>o</sup>) II<sup>o</sup>) hat zur Folge, dass nie für dasselbe  $\zeta$  zwei Wurzeln  $\eta = \infty$  werden, und die Beschränkung B<sup>o</sup>) III<sup>o</sup>) dass, wenn für ein bestimmtes  $\zeta$  eine Wurzel  $\eta = \infty$  wird, alle übrigen Wurzeln  $\eta$  ungleiche Werte haben.

Die Beschränkungen A<sup>o</sup>) II<sup>o</sup>) und III<sup>o</sup>) bewirken, dass für keinen Wert von  $\eta$  zwei Wurzeln  $\zeta = \infty$  werden, und dass, wo ein  $\zeta = \infty$  wird, die übrigen  $m - 1$  Wurzeln  $\zeta$  alle endlich und ungleich sind.

Bestimmt man daher  $s_0$  und  $z_0$  gemäß den Bedingungen A<sup>o</sup>), B<sup>o</sup>) und C<sup>o</sup>), so ergeben sich für die durch die Gleichung:

$$\Phi\left(\begin{smallmatrix} n \\ \eta, \zeta \end{smallmatrix}\right) = 0$$

verbundenen, neuen Veränderlichen  $\eta$  und  $\zeta$  folgende Vereinfachungen funktionen-theoretischer Natur:

- I<sup>o</sup>) In dem unendlich fernen Gebiete der  $\zeta$ -Ebene hat  $\eta$  weder Unstetigkeiten noch Koincidenzen, also auch keine Verzweigungspunkte; in den im Endlichen gelegenen Gebieten der  $\zeta$ -Ebene sind Unstetigkeiten und Wurzelkoincidenzen so von einander getrennt, dass, wo eine Koincidenz eintritt, keine Wurzel unstetig wird, und dort, wo eine Wurzel  $\eta$

unstetig wird, alle andern Wurzeln endliche, von einander verschiedene Werte haben.

II?) Dasselbe gilt, mutatis mutandis, von  $\zeta$ , wenn man  $\zeta$  als Funktion von  $\eta$  betrachtet.

Diesen Vereinfachungen funktionen-theoretischer Natur entsprechen folgende analytischen Vereinfachungen:

Da für  $\zeta = \infty$  keine Koincidenz stattfindet, so ist  $\mathcal{A}$  in  $\zeta$  vom höchst möglichen Grade  $2m(n-1)$ ; ebenso ist  $H$  in  $\eta$  vom Grade  $2n(m-1)$ .

Da ferner

$$h_0 + \frac{h_1}{\varphi} + \dots + \frac{h_m}{\varphi^m} = 0$$

ist, so ist für  $\zeta = \infty$ :

$$h_0 = 0.$$

Die Wurzeln  $\eta$  von  $h_0 = 0$  sind daher die Werte von  $\eta$ , die  $\zeta = \infty$  entsprechen; diese Wurzeln sind nach dem Vorigen alle ungleich. Die Gleichung  $h_0 = 0$  ist daher in  $\eta$  vom Grade  $n$  und hat lauter ungleiche Faktoren.

Analog folgt:  $g_0 = 0$  ist in  $\zeta$  vom Grade  $m$  und hat lauter ungleiche Wurzelfaktoren.

$\eta = \infty$  kommt niemals als mehrfache Wurzel vor, heißt: ist für ein bestimmtes  $\zeta$ :  $g_0 = 0$ , so ist  $g_1 \neq 0$ , d. h. kein Divisor von  $g_0$  ist Divisor von  $g_1$ .

Analog folgt: kein Divisor von  $h_0$  ist Divisor von  $h_1$ .

$\eta$  wird nie  $\infty$ , wenn Koincidenz eintritt, heißt: kein Divisor von  $g_0$  ist Divisor von  $\mathcal{A}$ ; ebenso ergibt sich: kein Divisor von  $h_0$  ist Divisor von  $H$ .

Fassen wir dies Alles zusammen, so haben wir folgende Vereinfachungen analytischer Natur:

In der Gleichung

$$\Phi\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ \eta, \zeta \end{smallmatrix}\right) = g_0 \cdot \eta^n + g_1 \cdot \eta^{n-1} + \dots + g_n = 0 \quad (\text{Discriminante } \mathcal{A}, \text{ oder}$$

$$\Phi\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ \eta, \zeta \end{smallmatrix}\right) = h_0 \cdot \zeta^m + h_1 \zeta^{m-1} + \dots + h_m = 0, \quad (\text{Discriminante } H)$$

ist:

- 1<sup>o</sup>)  $g_0$  vom Grade  $m$  in  $\zeta$  und hat nur ungleiche Wurzelfaktoren. Keiner dieser Faktoren  $(\zeta - r)$  ist Divisor von  $g_1$  oder von  $\Delta$ .  $\Delta$  selbst ist in  $\zeta$  vom Grade  $2m(n-1)$ .
- 2<sup>o</sup>)  $h_0$  ist in  $\eta$  vom Grade  $n$  und hat nur ungleiche Wurzelfaktoren  $\eta - t$ . Keiner dieser Faktoren ist Divisor von  $h_1$  oder von  $H$ .  $H$  selbst ist in  $\eta$  vom Grade  $2n(m-1)$ .

Dafs und wie die Substitution  $S$  mit den Beschränkungen A<sup>o</sup>), B<sup>o</sup>) und C<sup>o</sup>) auch die Form der Reihenentwickelungen der Wurzeln in der Umgebung eines gegebenen Punktes beeinflusst, ist unmittelbar ersichtlich.

Die mit Hilfe der Substitution  $S$  und der Bedingungen A<sup>o</sup>), B<sup>o</sup>) und C<sup>o</sup>) aus der Grundgleichung  $F=0$  erhaltene Gleichung  $\Phi=0$  nennen wir mit Christoffel eine normalisierte algebraische Gleichung.

Beispiel: Von der Gleichung

$$F\left(s, z\right) = 8z s^3 + 3(1-z)s + (1-z) = 0$$

haben wir bereits nachgewiesen, dafs von einem numerischen Faktor abgesehen, ihre Discriminante

$$D = z(1-z^2)(z+1)$$

ist, und dafs die Gleichung im Unendlichen keine Wurzelkoïncidenz besitzt. Die Wurzelkoïncidenzen und die entsprechenden Werte von  $s$  sind:

$$\begin{aligned} z=0: & \quad s = \infty, \infty, -\frac{1}{3}, \\ z=+1: & \quad s = 0, 0, 0, \\ z=-1: & \quad s = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Soll die Gleichung durch die Substitution  $S$  normalisiert werden, so darf, nach A<sup>o</sup>), I<sup>o</sup>), der Parameter  $z_0$  keinen der Werte

$$0, +1, -1$$

haben. Die Beschränkungen A<sup>o</sup>), II<sup>o</sup>) und III<sup>o</sup>) sind von selbst erfüllt, da die Grundgleichung vom ersten Grade in  $z$  ist.

Für  $s_0$  müssen ausgeschlossen werden:

nach B<sup>0</sup>), II<sup>0</sup>) und III<sup>0</sup>): die Werte:  $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, +1, \infty$

nach B<sup>0</sup>), I<sup>0</sup>): die Wurzeln von  $8s^3 - 3s - 1 = 0$ .

Wir nehmen  $z_0 = \frac{1}{2}$ ,  $s_0 = \frac{1}{2}$ ; diese Werte gehören nicht zu den eben ausgeschlossenen und erfüllen auch die Beschränkung C<sup>0</sup>), da das Polynom

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + 3\left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4},$$

also  $\neq 0$  ist.

Wählen wir ferner für die zu unserer Verfügung stehenden Größen  $\zeta_0$  und  $\eta_0$  die Werte  $\zeta_0 = 1$ ,  $\eta_0 = 1$ , so geht die Gleichung

$$F\left(s, z\right) = 8zs^3 + 3(1-z)s + 1 - z = 0$$

über in

$$\Phi\left(\eta, \zeta\right) = \eta^3(7\zeta - 10) - 12\eta^2(\zeta - 2) + 9\eta(\zeta - 2) - 2(\zeta - 2) = 0.$$

Diese Gleichung ist normal. Ihre Discriminante  $\Delta$  ist, wie die wirkliche Ausführung zeigt:

$$\Delta = 2 \cdot 18^2 \cdot \zeta(\zeta - 2)^2(3\zeta - 2),$$

und hat in  $\zeta$  den höchst möglichen Grad  $2m(n-1) = 4$ ; für  $\zeta = \infty$  findet also für  $\eta$  keine Wurzelkoincidenz statt. Da ferner für  $\zeta = \infty$

$$7\eta^3 - 12\eta^2 + 9\eta - 2 = 0$$

ist, so wird im Unendlichen auch keine Wurzel  $\eta$  unstetig.

In Endlichen finden für  $\eta$  Koincidenzen statt in den Punkten  $\zeta = 0, \frac{2}{3}, 2$ , und es ist

$$\text{für } \zeta = 0: \eta = 1, \quad 1, \quad \frac{2}{5},$$

$$, \quad \zeta = \frac{2}{3}: \eta = 2, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2},$$

$$, \quad \zeta = 2: \eta = 0, \quad 0, \quad 0.$$

Keine dieser Koincidenzen ist mit einer Unstetigkeit von  $\eta$  verbunden. Eine Unstetigkeit von  $\eta$  tritt ein für  $\zeta = \frac{10}{7}$ ; dort wird nur eine Wurzel  $\eta = \infty$ , die zwei anderen haben die Werte:

$$\frac{1}{24} (9 + i\sqrt{15}), \quad \frac{1}{24} (9 - i\sqrt{15}).$$

Da  $\phi$  in  $\zeta$  vom ersten Grade ist, so sind für  $\zeta$  als Funktion von  $\eta$  alle Wurzelkoincidenzen ausgeschlossen, also auch jedes Zusammenfallen von Unstetigkeit und Wurzelkoincidenz.  $\phi\left(\eta, \zeta\right) = 0$  ist also thatsächlich normalisiert.

### § 10. Zahl der Verzweigungspunkte bei nur einfachen Koincidenzen.

Die Puiseux'sche Methode ermöglicht es, für jede vorgelegte Grundgleichung, wenn die Lage der Wurzelkoincidenzen ermittelt ist, zu entscheiden, ob ein bestimmter Koincidenzpunkt ein Verzweigungspunkt ist oder nicht. In dem sehr speziellen Falle, daß sämtliche Koincidenzen einfache sind, läßt sich aber schon durch die bloße Bestimmung der Wurzeln der Discriminante  $D$  der Grundgleichung entscheiden, ob ein gegebener Koincidenzpunkt ein Verzweigungspunkt oder ein gewöhnlicher Doppelpunkt ohne Verzweigung ist.

Die Grundgleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  sei irreducibel und normal im Sinne des vorigen Paragraphen, und es sei  $z = \zeta$  ein Punkt, für den zwei Wurzeln  $s_1, s_2$  dieser Gleichung den gemeinsamen Wert  $s_1 = s_2 = \sigma$  annehmen. Ist dann:

1°)  $z = \zeta$  ein Verzweigungspunkt, in dessen Umgebung der von  $s_1$  und  $s_2$  gebildete Cyklus die Reihenentwicklung:

$$s = \sigma + A_1 (z - \zeta)^{\frac{1}{2}} + A_2 (z - \zeta) + A_3 (z - \zeta)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

besitzt, so ist:

$$s_1 = \sigma + A_1 (z - \zeta)^{\frac{1}{2}} + A_2 (z - \zeta) + A_3 (z - \zeta)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

$$s_2 = \sigma - A_1 (z - \zeta)^{\frac{1}{2}} + A_2 (z - \zeta) + A_3 (z - \zeta)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

und daher, immer in der Umgebung des Punktes  $z = \zeta$ :

$$\Delta = \frac{1}{2}(s_1 - s_2) = A_1(z - \zeta)^{\frac{1}{2}} + A_3(z - \zeta)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

oder allgemein, wenn  $A_{2x+1}$  der erste nicht verschwindende Koeffizient aus der Reihe  $A_1, A_3 \dots$  ist:

$$1^\circ) \quad \Delta = (z - \zeta)^{\frac{2x+1}{2}} \{B + B_1(z - \zeta) + \dots\}. \quad (B \neq 0)$$

Ist  $2^\circ) z = \zeta$  ein gewöhnlicher Doppelpunkt, so schreiben die Entwicklungen von  $s_1$  und  $s_2$  nach ganzen Potenzen von  $z - \zeta$  fort, und es ergibt sich:

$$2^\circ) \quad \Delta = (z - \zeta)^k \{B + B_1(z - \zeta) + \dots\}. \quad (B \neq 0)$$

Infolge unserer Voraussetzungen über  $F = 0$  ist  $s_1 - s_2 = 2\Delta$  die einzige Wurzeldifferenz, die für  $z = \zeta$  schwindet; die Funktionen

$$\frac{F'(s_1, z)}{\Delta}, \quad \frac{F''(s_2, z)}{\Delta}, \quad F''(s_3, z) \cdot F''(s_4, z) \dots F''(s_n, z)$$

werden also für  $z = \zeta$  weder Null noch unendlich, und das gleiche gilt, gemäß der in  $5^\circ) \S 5$  gegebenen Darstellung von  $D$ , auch von  $\frac{D}{\Delta^2}$ . Ist  $z = \zeta$  ein Verzweigungspunkt, so wird daher für  $z = \zeta$ :

$$\frac{D}{(z - \zeta)^{2x+1} \{B + B_1(z - \zeta) + \dots\}^2}$$

weder 0 noch  $\infty$ ; ist  $z = \zeta$  kein Verzweigungspunkt, so wird für  $z = \zeta$ :

$$\frac{D}{(z - \zeta)^{2k} \{B + B_1(z - \zeta) + \dots\}^2}$$

weder Null noch unendlich. Hieraus ergibt sich

**Satz  $1^\circ)$**  Hat die Grundgleichung  $F = 0$  nur einfache Wurzelkoincidenzen, so entspricht jedem Verzweigungspunkte  $z = \zeta$  ein Faktor  $(z - \zeta)^{2x+1}$ , jedem Doppelpunkt  $z = \zeta$  ein Faktor  $(z - \zeta)^{2k}$  von  $D$ . Und umgekehrt:

Enthält  $D$  einen Faktor  $z - \zeta$ , so ist  $z = \zeta$  ein Verzweigungspunkt oder ein Doppelpunkt, je nachdem  $D$  diesen Faktor zu einer ungeraden oder geraden Potenz enthält.

Aus diesem Satze läßt sich ein für spätere Untersuchungen sehr wichtiges Resultat ableiten. — Ist, unter der Voraussetzung von nur einfachen Koincidenzen,

$$3^0) \quad D = \text{konst.} (z - a_1)^{2\kappa_1 + 1} \dots (z - a_v)^{2\kappa_v + 1} \\ \cdot (z - b_1)^{2k_1} \dots (z - b_t)^{2k_t},$$

so sind  $a_1, \dots, a_v$  Verzweigungspunkte,  $b_1 \dots b_t$  Doppelpunkte ohne Verzweigung, und der Grad von  $D$  in  $z$  beträgt

$$v + 2(\kappa_1 + \dots + \kappa_v + k_1 + \dots + k_t) = v + 2r.$$

Da wir die Grundgleichung als normal angenommen haben, so ist dieser Grad andererseits gleich  $2m(n-1)$ . Wir haben daher, allerdings vorerst unter der Voraussetzung von nur einfachen Koincidenzen, die außerordentlich wichtige Beziehung:

$$4^0) \quad v = 2m(n-1) - 2r.$$

Die Anzahl der Verzweigungspunkte muß somit, wenn nur einfache Verzweigungspunkte auftreten, stets eine gerade sein.

---

## Kapitel II.

# Die Riemann'sche Verzweigungsfläche $T$ .

### § 11. Konstruktion der Fläche $T$ .

Versucht man, die für einwertige Funktionen von  $z$  gültigen Sätze und Methoden auf algebraische Funktionen zu übertragen, so tritt sogleich der Umstand hindernd in den Weg, daß, wenn die Variable  $z$  in der  $z$ -Ebene einen Ringweg beschreibt, dieser Ringweg eine algebraische Funktion von  $z$  nicht notwendig zu ihrem Anfangswerte zurückführt, mit anderen Worten, daß einem geschlossenen Wege von  $z$  nicht immer ein geschlossener Weg der algebraischen Funktion  $s$  in der  $s$ -Ebene entspricht.

Sollen die Hilfsmittel der Theorie der einwertigen Funktionen für das Studium der algebraischen Funktion  $s$  verwertet werden können, so müssen wir uns daher zuerst ein Gebiet herstellen, innerhalb dessen  $s$  sich wie eine eindeutige Funktion des Ortes verhält. Ein solches Gebiet ist die von Riemann eingeführte und nach ihm benannte Riemann'sche Verzweigungsfläche  $T$ . — Zu dieser Fläche kann man auf folgendem Wege gelangen.

Die algebraische Funktion  $s$  von  $z$  sei definiert durch die Gleichung

$$F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ z, & z \end{smallmatrix}\right) = 0,$$

die wir als irreducibel und normal voraussetzen. — In der Zahlenebene der  $z$  denken wir uns die Verzweigungspunkte von  $s$  markiert und verbinden dieselben in beliebiger Reihenfolge  $\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n$  durch eine sich selbst nicht schneidende, sonst willkürlich gestaltete Linie  $\Sigma$ , die wir



bis ins Unendliche fortsetzen. Wir treffen weiter die Bestimmung, daß die Variable  $z$  bei ihrer Ortsänderung in der  $z$ -Ebene die Linie  $\Sigma$  nicht überschreiten darf, was wir dadurch ausdrücken können, daß wir uns die  $z$ -Ebene längs  $\Sigma$  durchgeschnitten denken. Unterscheiden wir die zwei Ränder dieses Sperrschnittes  $\Sigma$  (bei Cauchy: ligne d'arrêt) als  $+$  Rand und  $-$  Rand, so kann  $z$  von einem Punkte  $\beta$  auf dem  $-$  Rand zu dem ihm gegenüberliegenden Punkte  $\gamma$  auf dem  $+$  Rand nur mehr auf einem Umwege, etwa  $l$ , gelangen (siehe Fig. 15). In der durch  $\Sigma$  modifizierten

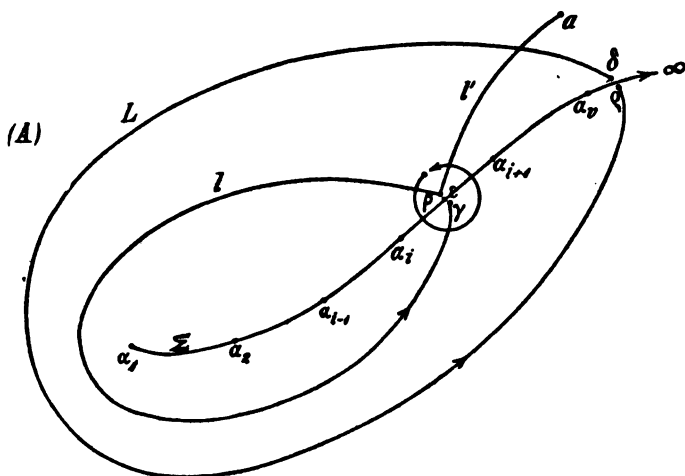


Fig. 15.

$z$ -Ebene sind daher Ringwege, die Verzweigungspunkte umschließen, nicht mehr möglich: Jede Wurzel  $s$  von  $F=0$  ist in dieser Ebene eindeutig geworden. — Während wir so durch Anlegen des Sperrschnittes  $\Sigma$  die durch die Verzweigungspunkte hervorgerufene Vieldeutigkeit der Wurzeln beseitigt haben, hat sich aber ein anderer Übelstand eingestellt. Vor dem Anlegen von  $\Sigma$  war jede einzelne Wurzel  $s_x$  ( $x=1, \dots, n$ ) innerhalb der ganzen  $z$ -Ebene bis auf vereinzelte Punkte (Pole von  $s$ ) stetig, und jedem Punkte  $z=a$  entsprach ein völlig bestimmter Wert für jedes  $s_x$ . Ging man in der noch un-

zerschnittenen  $z$ -Ebene vom Punkte  $z = a$  mit den dort vorhandenen Werten von  $s_x$  ( $x = 1, 2 \dots n$ ) aus, so lieferte die stetige Fortsetzung dieser Wurzeln längs eines allen singulären Punkten ausweichenden Weges  $l'$  im Punkte  $\varepsilon$  ganz bestimmte Werte der  $s_x$ , und die weitere Fortsetzung dieser Wurzeln längs eines Ringweges  $l$  (Fig. 15) ergab als Endwerte in  $\varepsilon$  im allgemeinen eine Permutation

$$s_{i_1}, \dots, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}$$

der Anfangswerte  $s_x(\varepsilon)$ , (§ 3, Satz IV<sup>o</sup>). Denkt man sich nun die Sperrlinie  $\Sigma$  durch  $\varepsilon$  hindurchgelegt, so wird  $\varepsilon$  so zu sagen zerlegt in die zwei an den Rändern von  $\Sigma$  einander gegenüberliegenden Punkte  $\beta$  und  $\gamma$ . Da durch  $\Sigma$  im Innern der  $z$ -Ebene, durch welches die Wege  $l'$  und  $l$  führen, nichts geändert worden ist, so führt der von  $a$  nach  $\beta$  gehende Weg  $l'$  die  $n$  Wurzeln  $s_x$  ( $x = 1, \dots, n$ ) immer noch zu denselben Werten  $s_x(\beta) = s_x(\varepsilon)$  wie früher, und ebenso führt der Weg  $l$ , der jetzt von  $\beta$  nach  $\gamma$  geht, diese Werte  $s_x(\beta)$  in dieselbe Permutation

$$s_{i_1}(\beta), s_{i_2}(\beta), \dots, s_{i_n}(\beta)$$

derselben über, wie früher. Bezeichnen wir daher den Wert von  $s_x$  in  $\beta$  mit  $\overline{s}_x$ , den durch stetige Fortsetzung bis  $\gamma$  herbeigeführten Endwert von  $s_x$  mit  $s_x^+$ , so ist allgemein:

$$\overline{s}_x = s_x^-.$$

An der Sperrlinie  $\Sigma$  sind also wenigstens einzelne Wurzeln unstetig geworden, an  $\Sigma$  findet jetzt ein plötzlicher endlicher Sprung in den beiderseits angelagerten Wurzelwerten statt; jedem Wurzelwerte  $\overline{s}_x$  an dem negativen Rande von  $\Sigma$  liegt ein durch stetige Fortsetzung erhaltener, im allgemeinen verschiedener Wurzelwert  $s_x^+$  an dem  $+$  Rande gegenüber. — Nennen wir zwei solche Wurzelwerte einander zugeordnet, so können wir auch sagen: Längs  $\Sigma$  ist jedem Wurzelwerte  $\overline{s}_x$  ein im allgemeinen verschiedener Wurzelwert  $s_x^+$  zugeordnet.

Über diese Zuordnung gelten folgende Sätze:

**Satz I<sup>o</sup>)** Vom letzten Verzweigungspunkte  $\alpha_v$  bis ins Unendliche ist an  $\Sigma$  überall:

$$\begin{matrix} + & - \\ s_x = & s_x. \end{matrix}$$

Beweis: Nimmt man an diesem Schlufsstück von  $\Sigma$  zwei einander gegenüberliegende Punkte  $\delta$  und  $\varrho$  an, so läßt sich jeder in der unzerschnittenen  $z$ -Ebene von  $\delta$  nach  $\varrho$  führende Weg  $L$  (Fig. 15) auffassen als Ringweg, der die Außenfläche  $A$  umschließt. Infolge der vorausgesetzten Normalisierung der Grundgleichung enthält aber  $A$  keinen Verzweigungspunkt. Nach Satz II<sup>o</sup>) § 3 führt daher  $L$  jede

Wurzel zu ihrem Anfangswert zurück, d. h. es ist  $\begin{matrix} + & - \\ s_x = & s_x, \end{matrix}$  w. z. b. w.

Folgerung: Das Schlufsstück von  $\Sigma$  über  $\alpha_v$  hinaus ist für die Erzwingung der Eindeutigkeit der Wurzeln überflüssig.

**Satz II<sup>o</sup>)** Auf den zwei Seiten eines Punktes  $\varepsilon$  von  $\Sigma$  ist die Zuordnung der Wurzeln stets und nur dann verschieden, wenn  $\varepsilon$  ein Verzweigungspunkt ist.

Beweis: 1<sup>o</sup>) Wäre zu beiden Seiten eines Verzweigungspunktes  $\varepsilon$  die Wurzelordnung dieselbe, so würde ein in der unzerschnittenen  $z$ -Ebene in hinreichender Nähe um  $\varepsilon$  führender Ringweg jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurückführen, was mit der Definition eines Verzweigungspunktes (§ 3) unvereinbar ist.

2<sup>o</sup>) Ist zu beiden Seiten von  $\varepsilon$  die Zuordnung der Wurzeln verschieden, so führt ein in der unzerschnittenen  $z$ -Ebene in hinreichender Nähe um  $\varepsilon$  gehender Ringweg mindestens eine Wurzel nicht zu ihrem Anfangswerte zurück;  $\varepsilon$  ist daher ein Verzweigungspunkt. —

Die Gleichungen:

$$\begin{matrix} + & - \\ s_1 = & s_{i_1}, \\ + & - \\ s_1 = & s_{i_2}, \\ . & . & . & . \\ + & - \\ s_n = & s_{i_n}, \end{matrix}$$

welche die Zuordnung der Wurzeln längs einer von  $\alpha_i$  bis  $\alpha_{i+1}$  reichenden Abteilung  $\Sigma_i$  von  $\Sigma$  angeben, können wir als definierende Gleichungen einer Substitution:

$$1^0) \quad S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & & i_n \end{pmatrix}$$

auffassen, durch welche die Wurzeln  $s_1, s_2 \dots s_n$  in  $s_{i_1}, s_{i_2} \dots s_{i_n}$  übergeführt werden. Bezeichnet man dann die den einzelnen Abteilungen  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots \Sigma_{v-1}$  von  $\Sigma$  entsprechenden Substitutionen mit  $S_1, S_2, \dots S_{v-1}$ , so liefert  $S_i \cdot S_i^{-1}$ , wo allgemein  $S^{-1}$  die zu  $S$  inverse Substitution bedeutet, diejenige Substitution  $S'_i$ , die man erhält, wenn man in der unzerschnittenen  $z$ -Ebene die Variable  $z$  einen positiven Umlauf um den Verzweigungspunkt  $\alpha_i$  ausführen läßt.

Um die durch Anlegung des Sperrschnittes  $\Sigma$  herbeigeführte Unstetigkeit der Wurzeln wieder zu beseitigen, verfährt man mit Riemann folgendermaßen:

Für jede der  $n$  Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  führen wir eine besondere Ebene ein,  $E_1$  für  $s_1$ ,  $E_2$  für  $s_2, \dots E_n$  für  $s_n$ , und denken uns in jeder dieser Ebenen tabellarisch die Werte der entsprechenden Wurzel eingetragen. Diese  $n$  Ebenen, welche mit ihrem Tabelleninhalt den ganzen Wertvorrat von  $s$  als Funktion von  $z$  repräsentieren, legen wir so aufeinander, daß Punkte mit demselben  $z$  übereinander liegen, und ziehen in denselben  $n$  kongruente Sperrschnitte  $\Sigma$ , in jeder Ebene einen. Zwischen den  $n$  Tabellenblättern  $E_1 \dots E_n$  stellen wir nun einen stetigen Übergang in folgender Weise her.

In der ursprünglichen, durch den einen Sperrschnitt  $\Sigma$  modifizierten  $z$ -Ebene sei die Zuordnung der Wurzeln längs  $\Sigma_i$  charakterisiert durch die Substitution:

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir daher die Teile von  $E_1 \dots E_n$ , die am — Rande der  $n$  Abteilungen  $\Sigma_i$  liegen, mit  $\bar{E}_1, \dots \bar{E}_n$ , die am + Rande anstoßenden mit  $\bar{E}_1^+, \dots \bar{E}_n^+$ , so findet sich die stetige Fortsetzung der an  $\Sigma_i$  in  $\bar{E}_1^+$  befindlichen Tabellen-

werte in  $\bar{E}_1$ , die von  $\bar{E}_2$  in  $\bar{E}_3, \dots$ , die von  $\bar{E}_n$  in  $\bar{E}_1$ . Um eine zusammenhängende, stetig verlaufende Tabellenanordnung der Werte von  $s$  zu erhalten, genügt es also, sich längs  $\Sigma_i$ :  $\bar{E}_1$  an  $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$  an  $\bar{E}_2, \dots$ ,  $\bar{E}_n$  an  $\bar{E}_1$  geheftet zu denken, und die entsprechende Heftung auch an den anderen Abteilungen von  $\Sigma$ , gemäß den dort geltenden Substitutionen  $S$  auszuführen. Ist dabei längs  $\Sigma_x$  eine Wurzel  $s_2$  sich selbst zugeordnet, so daß an  $\Sigma_x: s_2 = s_2$  ist, so hängt das Blatt  $E_2$ , das den gesamten Wertvorrat von  $s_2$  enthält, längs  $\Sigma_x$  mit keinem andern Blatt zusammen;  $\Sigma_x$  wird in diesem Blatte gelöscht.

Die durch Ausführung dieser Heftungen entstandene, überall zusammenhängende  $n$ -blättrige Fläche heisst die zur Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  gehörige Riemann'sche Fläche  $T$ . Die in ihr liegenden Abteilungen von  $\Sigma$ , längs deren wir die Blätter zusammengeheftet haben, nennt man die Verzweigungsschnitte von  $T$ .

Um eine klare Anschauung dieser Verzweigungsschnitte zu gewinnen, denken wir uns einen speziellen Fall. Längs  $\Sigma_i$  sei die Zuordnung der Wurzeln charakterisiert durch die Substitution

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots n \\ 2 & 3 & 1 & 4 \dots n \end{pmatrix}.$$

In  $T$  ist dann  $\bar{E}_1$  an  $\bar{E}_2$ ,  $\bar{E}_2$  an  $\bar{E}_3$ ,  $\bar{E}_3$  an  $\bar{E}_1$  geheftet, während in den übrigen Blättern  $E_4, \dots, E_n$  die Abteilung  $\Sigma_i$  gelöscht worden ist. Denken wir uns die drei Blätter  $E_1, E_2, E_3$  in dieser Reihenfolge aufeinandergelegt und durch eine Ebene normal zu  $\Sigma_i$  durchgeschnitten, so erhalten wir die Profilzeichnung Fig. 16, in der die Verbindung der

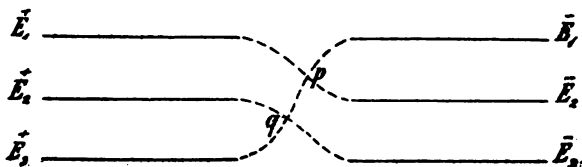


Fig. 16.

Blätter deutlich angegeben ist. Senkrecht zur Zeichenebene haben wir uns, durch die Punkte  $p$  und  $q$  gehend, zwei Übergangslinien (Brücken) zwischen  $E_1, E_2, E_3$  zu denken, längs welcher die Blätter zusammenhängen, einander durchsetzen. Diese Übergangslinien liegen vorläufig genau übereinander, doch können sie auch mit Beibehaltung ihrer Endpunkte  $\alpha_i$  und  $\alpha_{i+1}$  so verschoben werden, daß etwa die Profilzeichnung Fig. 17 sich ergibt. Wie aus den Figuren ersichtlich, bildet die erste Übergangslinie die Brücke zwischen  $E_1$  und  $E_2$ , die zweite zwischen  $E_2$  und  $E_3$ .

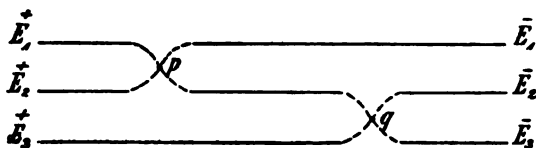


Fig. 17.

Bei der im Vorigen durchgeführten Konstruktion der zu einer bestimmten Grundgleichung  $F=0$  gehörigen Fläche  $T$  ist noch manches willkürlich. Willkürlich ist die Gestalt der Sperrlinie zwischen den einzelnen Verzweigungspunkten, willkürlich die Reihenfolge, in der wir die Blätter aufeinander gelegt haben, willkürlich die Reihenfolge, in welcher die Sperrlinie  $\Sigma$  die Verzweigungspunkte verbindet.

Den Umstand, daß jede Abteilung der Sperrlinie bei Festhaltung ihrer Endpunkte willkürlich verschoben werden kann, wofern dabei kein Verzweigungspunkt überschritten wird und keine Abteilung sich selbst oder eine andere schneidet, benutzen wir, um eine von der vorigen etwas verschiedene Erzeugungsweise der Fläche  $T$  abzuleiten. — Wir denken uns die einzelnen Abteilungen von  $\Sigma$  soweit in der  $z$ -Ebene nach derselben Seite hin verschoben, bis sie alle einen nicht singulären, sonst beliebigen Punkt  $z_0$  gemein haben. Die Sperrlinie  $\Sigma$  geht dann über in ein System von  $v$  Schnitten, die strahlenförmig vom Punkte  $z_0$  aus nach den  $v$  Verzweigungspunkten hinlaufen. An der neuen Sperrlinie, d. h. an den strahlenförmig von  $z_0$  nach  $\alpha_1 \dots \alpha_v$  hinlaufenden Schnitten  $l_1 \dots l_v$ , ist zugleich die Zuordnung der Wurzeln eine andere geworden. Trifft ein positiver Umlauf um  $z_0$  die Strahlen  $l_1 \dots l_v$  in der Reihenfolge

$$\bar{l}_1^+ \bar{l}_1^- \bar{l}_2^+ \bar{l}_2^- \dots \bar{l}_v^+ \bar{l}_v^-,$$

so ist die Zuordnung der Wurzeln an  $l_i$  charakterisiert durch die Substitution

$$2^0) \quad S_i = S_i S_{i-1}^{-1},$$

welche auch die Permutation definiert, die ein positiver Umlauf um den Verzweigungspunkt  $\alpha_i$  in der unzerschnittenen  $z$ -Ebene herbeiführt. — Von den  $v$  Substitutionen  $S'$  ist die erste  $S'_1 = S_1$ , die letzte  $S'_v = S_v^{-1}$ , während sämtliche Substitutionen  $S'$ , wie aus 2<sup>0</sup>) unmittelbar folgt, durch die Beziehung

$$3^0) \quad S'_1 S'_2 \dots S'_v = 1$$

verbunden sind.

Man kann sich nun die Fläche  $T$  auch in folgender Weise entstanden denken. In der  $z$ -Ebene ziehe man von irgend einem nicht singulären Punkte  $z_0$  aus nach den Verzweigungspunkten  $\alpha_1 \dots \alpha_v$  Linien  $l_1 \dots l_v$ , die weder sich selber noch einander (außer in  $z_0$ ) treffen, und schneide die  $z$ -Ebene längs dieser Linien auf. Die Aufeinanderfolge dieser  $l$  sei so gewählt, daß ein positiver Umlauf um  $z_0$  die Ränder der Schnitte in der Reihenfolge

$$\bar{l}_1^+ \bar{l}_1^- \bar{l}_2^+ \bar{l}_2^- \dots \bar{l}_v^+ \bar{l}_v^-,$$

überschreitet. Die den  $n$  Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  entsprechenden Tabellenblätter  $E_1, \dots, E_n$  lege man nun so aufeinander, daß die  $n$  Schnitte  $l_i$  ( $i = 1, 2 \dots v$ ) sich decken. Die Riemann'sche Fläche  $T$  entsteht dann, wenn man längs jedes Schnittes  $l_x$  ( $x = 1, 2 \dots v$ ) die Ränder von  $E_1 \dots E_n$  so verbindet, wie es die zu  $l_x$  gehörige Substitution  $S'_x$  angeht. Ist z. B.

$$S'_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix},$$

so hefte man  $\bar{E}_1^+ \dots \bar{E}_n^+$  resp. an  $\bar{E}_{x_1}^- \dots \bar{E}_{x_n}^-$ , so daß ein positiver Umlauf um  $\alpha_x$  aus dem Blatte  $E_i$  in das Blatt  $E_{x_i}$  führt.

Die so entstehende Fläche  $T$  ist eine zusammenhängende. Wir können dies auch dadurch ausdrücken, daß wir sagen: die aus  $S'_1 \dots S'_v$  erzeugte Gruppe von Substitutionen ist transitiv.

Eine andere Eigenschaft der Substitutionen  $S'$  ist in 3°) enthalten; diese Beziehung ist der Ausdruck dafür, daß ein in der  $z$ -Ebene ausgeführter positiver Umlauf um den Punkt  $z_0$  jede Wurzel zu ihrem Anfangswerte zurückführt, daß also ein in der Fläche  $T$  ausgeführter Umlauf um  $z_0$  schon nach einmaliger Umkreisung von  $z_0$  in das Ausgangsblatt zurückführt.

Die Konstruktion der Fläche  $T$  durch Heftung der Blätter  $E_1 \dots E_n$  längs der strahlenförmig vom Punkte  $z_0$  nach den Verzweigungspunkten laufenden Schnitte  $l_1 \dots l_n$  ermöglicht einen bessern Einblick in die Natur der Verzweigungspunkte höherer Ordnung. Angenommen, der Punkt  $z = \alpha_i$  sei ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $\mu = 6$ , so daß im Punkt  $\alpha_i$  diejenigen sechs Blätter von  $T$  zusammenhängen, auf denen der Wertinhalt der sechs Wurzeln  $s_1 \dots s_6$  ausgebreitet ist, die sich durch einen positiven Umlauf um  $z = \alpha_i$  cyclisch permutieren. Ist

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \dots n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \dots n \end{pmatrix}$$

die dem Schnitte  $l_i$  zugehörige Substitution, so geht die Variable  $z$  bei jedem Umlauf in das nächstfolgende Blatt, muß also sechsmal um  $z = \alpha_i$  herumlaufen, ehe sie wieder an ihre Ausgangsstelle zurückkehrt. Zu demselben Resultat kommt man aber auch, wenn man fünf einfache Verzweigungspunkte  $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_5$  annimmt, deren Verbindungslinien  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_5$  mit  $z_0$  die Substitutionen:

$$S'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ 2 & 1 & 3 \dots n \end{pmatrix}, \quad S'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots n \\ 3 & 2 & 1 & 4 \dots n \end{pmatrix}, \dots$$

$$S'_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \dots n \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \dots n \end{pmatrix}$$

entsprechen. Geht man von einem Punkte  $\beta$  im Blatte  $E_1$  aus, so führen, wie Fig. 18 zeigt, erst 6 Umläufe wieder in das Blatt  $E_1$  zurück, so daß der Ringweg sich erst nach 6 Umläufen schließt. Jeder Umlauf führt dabei  $z$  aus einem Blatte in das nächstfolgende Blatt, genau wie bei dem Verzweigungspunkte  $\alpha_i$  von der Ordnung 6. Läßt man die 5 Verzweigungspunkte  $\gamma$ , sowie die Schnitte  $\lambda$  sich einander



nähern und schließlich zusammenfallen, so bleibt alles ungeändert. Wir haben daher den

**Satz III<sup>o</sup>)** Jeder Verzweigungspunkt von der Ordnung  $\mu$  läßt sich ansehen als äquivalent mit  $\mu - 1$  einfachen Verzweigungspunkten.

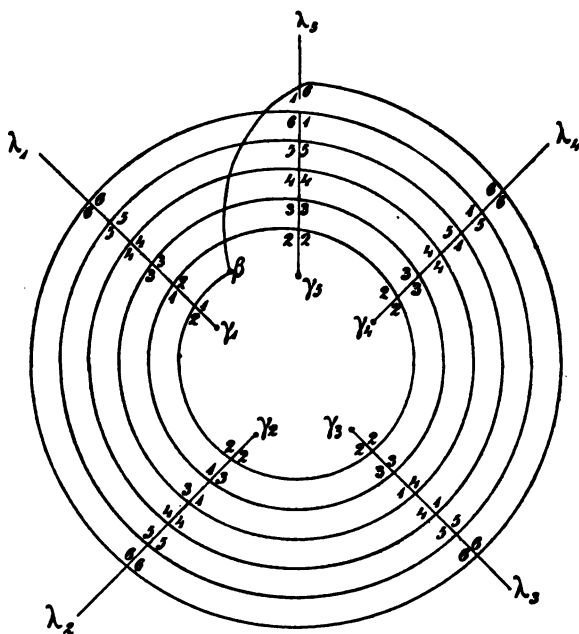


Fig. 18.

Ändert man die Reihenfolge, in der die  $n$  Blätter  $E_1 \dots E_n$  aufeinandergelegt werden, so wird an dem Tabelleninhalt der Fläche  $T$  nichts geändert, dagegen wird die Art, wie sich die Blätter durchsetzen, eine andere. Ist z. B. für  $n = 5$  die Zuordnung der Blätter links und rechts vom Verzweigungspunkte  $\alpha_i$  gegeben durch die Substitutionen:

$$S_{i-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

so erhält man, wenn die Blätter in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4, 5 aufeinandergelegt werden, für die Verbindung der Blätter links und rechts von  $\alpha$ , die Profilzeichnungen Fig. 19 a) und b).

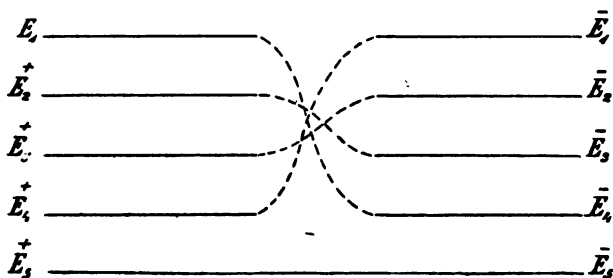


Fig. 19a.

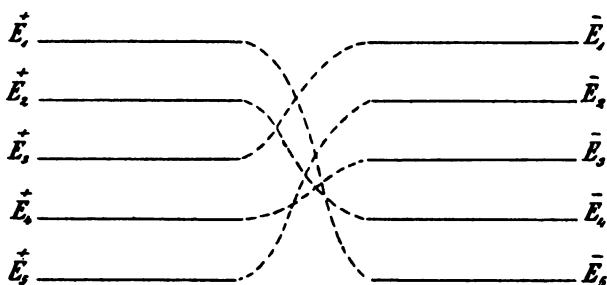


Fig. 19b.

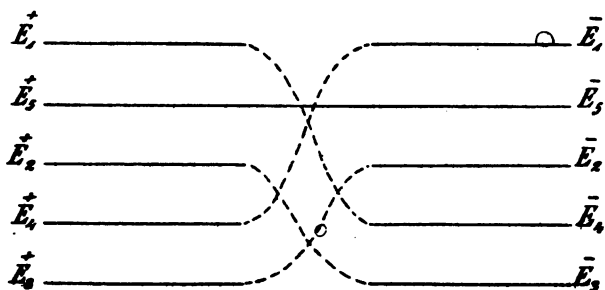


Fig. 20a.

Legt man dagegen die Blätter in der Reihenfolge 1, 5, 2, 4, 3 aufeinander, so ergeben sich die Profilzeichnungen Fig. 20 a) und b). — Die letztere Art der Anordnung der Blätter  $E_1 \dots E_5$  liefert, wenigstens für  $\Sigma_i$ , eine übersichtlichere Zusammenheftung der Blätter, wie die erstere.

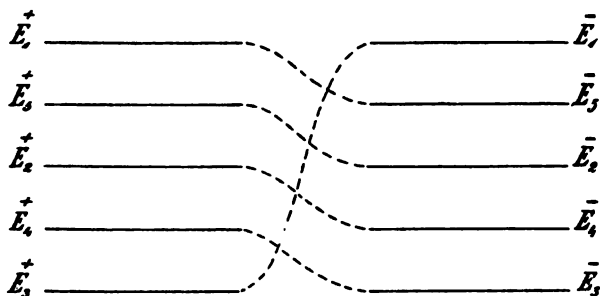


Fig. 20 b.

Den Umstand schließlich, daß die Reihenfolge, in welcher der Sperrschnitt  $\Sigma$  die Verzweigungspunkte verbindet, willkürlich ist, werden wir später dazu benutzen, um wenigstens für den Fall nur einfacher Verzweigungspunkte eine übersichtliche Normalform der Fläche  $T$  herzustellen.

Die zur Grundgleichung  $F=0$  gehörige Fläche  $T$  veranschaulicht in greifbarer Form den Einfluß der Verzweigungspunkte auf die durch einen Ringweg in der  $z$ -Ebene herbeigeführte Permutation der Anfangswerte der Wurzeln, von der bereits in § 3 die Rede war.

In der einfachen  $z$ -Ebene entspricht jedem Werte von  $z$  ein ganz bestimmter Punkt dieser Ebene; in der Fläche  $T$  dagegen gehören zu jedem Werte von  $z$   $n$  übereinander liegende Punkte, in jedem Blatte von  $T$  einer. Ein Punkt von  $T$  ist also durch den daselbst vorhandenen Wert von  $z$  allein noch nicht bestimmt, sondern erst durch diesen Wert zusammen mit dem dort stattfindenden Werte von  $s$ ; diese zwei zusammengehörigen, einen Punkt von  $T$  vollständig bestimmenden Werte von  $s$  und  $z$  mögen die Koordinaten dieses Punktes heißen.

Beschreibt  $z$  in der  $z$ -Ebene einen Weg  $l$ , der von einem Punkte  $z = a$  nach einem Punkte  $z = b$  führt, so entsprechen demselben in  $T$ , wenn  $l$  allen Verzweigungspunkten ausweicht,  $n$  getrennte Wege  $l_1 \dots l_n$ , deren Anfangspunkte die  $n$  übereinander liegenden Punkte  $z = a$ , und deren Endpunkte die  $n$  übereinander liegenden Punkte  $z = b$  von  $T$  sind. Bezüglich dieser Endpunkte sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1<sup>o</sup>) Der Weg  $l$  geht nicht durch die behufs Konstruktion der Fläche  $T$  angelegte Sperrlinie  $\Sigma$  hindurch. — In diesem Falle verläuft jeder der  $n$  Wege  $l_1 \dots l_n$  ganz in dem Blatte, in dem er seinen Ausgang genommen hat.

2<sup>o</sup>) Der Weg  $l$  geht durch  $\Sigma$  hindurch. — In diesem Falle endigen mindestens zwei der Wege  $l_1 \dots l_n$  auf einem andern Blatte, als dem, in welchem sie ihren Anfang genommen haben. Schließt sich z. B. dort, wo  $l$  die Linie  $\Sigma$  durchsetzt, das Blatt  $E_x$  an  $E_\lambda$  an, so geht  $l_x$  daselbst aus  $E_x$  in  $E_\lambda$  über. Da aber die  $n$  Endpunkte von  $l_1 \dots l_n$  so auf die  $n$  Blätter von  $T$  verteilt sind, daß in jedem Blatte einer derselben liegt, so muß es einen weiteren Weg  $l_u$  geben, der ebenfalls sein Ausgangsblatt verläßt und in  $E_x$  endigt.

Fällt der Endpunkt  $b$  von  $l$  mit dem Anfangspunkte  $a$  zusammen, so geht  $l$  in einen Ringweg über, und man hat den

**Satz IV<sup>o</sup>)** Jedem Ringwege  $l$  in der  $z$ -Ebene, der allen Verzweigungspunkten ausweicht, entsprechen in  $T$   $n$  getrennt verlaufende Wege  $l_1 \dots l_n$ , die nicht immer Ringwege in  $T$  sind. Die Endpunkte von  $l_1 \dots l_n$  bilden eine Permutation der Anfangspunkte, und die Endwerte, die  $s_1 \dots s_n$  auf  $l_1 \dots l_n$  erlangen, bilden dieselbe Permutation ihrer Anfangswerte.

Aus diesem Satze ergibt sich ferner:

**Satz V<sup>o</sup>)** Ist  $T$  zusammenhängend, so kann man in der einfachen  $z$ -Ebene stets einen Weg  $l$  so wählen, daß ein beliebiger Weg  $l_u$  aus der Reihe der Wege  $l_1 \dots l_n$  in einem beliebigen Blatte  $E_\mu$  von  $T$  endigt.

Von der zu einer irreducibelen Gleichung  $F=0$  gehörigen Fläche  $T$  haben wir bereits gesagt, daß sie zusammenhängend ist. Es folgt das schon aus ihrer Konstruktion. Vielleicht ist es jedoch nicht überflüssig, einen formellen Beweis dafür zu liefern, und zu zeigen, daß auch umgekehrt  $F=0$  irreducibel ist, wenn  $T$  zusammenhängend ist.

Angenommen,  $T$  zerfalle bei irreducibler Grundgleichung  $F=0$ , d. h. es mögen etwa die Blätter  $E_1, \dots, E_\mu$  untereinander, aber nicht mit den andern Blättern  $E_{\mu+1}, \dots, E_n$  zusammenhängen. Dann wäre das Produkt

$$(s - s_1) \dots (s - s_\mu)$$

in der einfachen  $z$ -Ebene einwertig,  $F=0$  also nicht mehr irreducibel, was der Voraussetzung widerspricht.

Wäre umgekehrt, bei zusammenhängendem  $T$  das Produkt

$$(s - s_1) \dots (s - s_\mu)$$

ein in  $s$  und  $z$  rationaler Faktor von  $F$ , so würde jeder Ringweg  $l$  in der  $z$ -Ebene diesen Faktor zu seinem Anfangswerte zurückführen, was nach Satz V<sup>9</sup>) dieses Paragraphen unmöglich ist. — Wir können daher den Doppelsatz aussprechen:

**Satz VI<sup>9</sup>)** Ist  $F=0$  irreducibel, so ist  $T$  zusammenhängend, und umgekehrt: ist  $T$  zusammenhängend, so ist  $F=0$  irreducibel.

Bevor wir dazu übergehen, an einigen speziellen Beispielen die Konstruktion der Fläche  $T$  zu erläutern, bleibt uns noch ein Punkt zu erledigen. — In den bisherigen Ausführungen haben wir, wenn der Wert  $z = \infty$  in Betracht kam, stets von dem  $\infty$ -fernen Punkte der  $z$ -Ebene gesprochen, also angenommen, daß alle  $\infty$  vielen verschiedenen Richtungen, die von einem Punkte der  $z$ -Ebene aus ins Unendliche führen, in demselben Punkte konvergieren. Dieser Annahme liegt die Vorstellung zu Grunde, daß die  $z$ -Ebene im Unendlichen geschlossen, etwa eine Kugel von  $\infty$  großem Radius ist. Zu derselben Vorstellung über das Unendlichferne kann man aber auch auf folgendem Wege gelangen. Denkt man sich eine Kugel von beliebigem endlichen Radius  $r$ , welche die  $z$ -Ebene im Punkte  $z = 0$  berührt, und projiziert

man alle Punkte der  $z$ -Ebene von dem diesem Berührungspunkte  $S$  diametral entgegengesetzten Kugelpunkte  $N$  aus, so weist jeder Projektionsstrahl einem Punkt der  $z$ -Ebene einen und nur einen Punkt der Kugelfläche zu, und die unendlich fernen Gebiete der  $z$ -Ebene haben ihre Projektion in dem einen Punkte  $N$ .

Diese Projektion der  $z$ -Ebene auf die Oberfläche einer Kugel vom Radius  $r$ , welche man wohl auch als Transformation mit Hilfe reziproker Radien Vektoren vom Inversionscentrum  $N$  aus bezeichnet, führt unmittelbar zu einer Umformung von  $T$ , welche diese Fläche der Anschauung näher rückt, indem sie dieselbe durch ein Flächengebilde im dreidimensionalen Raume ersetzt. — Projiziert man jede der  $n$ -Ebenen von  $T$  auf eine sie im Punkte  $z = 0$  berührende Kugelfläche von konstantem Radius, so entsteht ein System von  $n$  konzentrischen, unendlich nahe bei einander liegenden Kugelflächen, die sogenannte Riemann'sche Kugelfläche. Die Blätter dieser Fläche durchsetzen sich ebenso wie die ebenen Blätter von  $T$ , und den Durchsetzungslinien läßt sich stets eine solche Gestalt geben, daß sie auf der Kugelfläche Bogen größter Kreise sind. Den  $n \infty$  fernen Gebieten von  $T$  entsprechen  $n$  übereinander liegende Punkte der Kugelfläche, die  $n \infty$ -benachbarten Inversionscentren.

Zur Erläuterung der Ausführungen dieses Paragraphen mögen einige Beispiele vorgeführt werden, wobei wir uns an die erste, auf die Zuordnung der Wurzeln an der Sperrlinie  $\Sigma$  sich stützende Konstruktion von  $T$  halten.

Beispiel 1<sup>o</sup>) Die schon früher (§ 4, Beisp. 3<sup>o</sup>) betrachtete, durch die Gleichung

$$s^2 - (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{2q}) = 0$$

definierte algebraische Funktion  $s$  von  $z$  besitzt Verzweigungspunkte an den Stellen  $z = \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{2q}$  der  $z$ -Ebene. Läßt man  $\Sigma$  die Verzweigungspunkte in dieser Reihenfolge verbinden, so ist längs aller Abteilungen  $\Sigma_2, \Sigma_4, \dots \Sigma_{2q-2}$  von  $\Sigma$  die Zuordnung der Wurzeln gegeben durch die identische Substitution

$$S_{2x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (x = 1, 2 \dots q-1),$$

und längs der Abteilungen  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2q-1}$  durch die Substitution

$$S_{2x-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (x = 1, 2 \dots q).$$

Um die zur Funktion  $s$  gehörige Fläche  $T$  zu erhalten, hat man daher nur die zwei Blätter  $E_1, E_2$ , welche den Wertevorrat von je einer der zwei Wurzeln  $s_1, s_2$  enthalten, längs  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2q-1}$  zusammenzuheften. — Die entstehende Fläche  $T$  ist die Fläche der hyperelliptischen Funktionen.

Beispiel 2<sup>o</sup>) Die durch die Gleichung

$$s^3 + z^3 - 1 = 0$$

definierte Funktion  $s$  besitzt Verzweigungspunkte nur an den Stellen  $z = 1, \alpha, \alpha^2$ , ( $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ). Aus dem in § 4, Beispiel 5<sup>o</sup>) Entwickelten folgt, wenn  $\Sigma$  die Verzweigungspunkte in der Reihenfolge  $1, \alpha, \alpha^2$  verbindet: längs der von 1 nach  $\alpha$  führenden Abteilung  $\Sigma_1$  von  $\Sigma$  ist die Zuordnung der Wurzeln  $s_1, s_2, s_3$  gegeben durch:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

längs der von  $\alpha$  nach  $\alpha^2$  gehenden Abteilung  $\Sigma_2$  von  $\Sigma$  durch:

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Zusammenhang der Blätter  $E_1, E_2, E_3$  wird also längs  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  dargestellt durch die Profilzeichnungen Fig. 21 a und b.

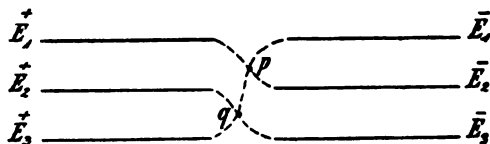


Fig. 21 a.

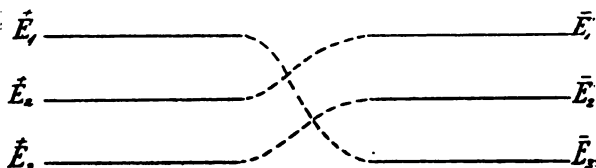


Fig. 21 b.

Beispiel 3<sup>o</sup>) Es sei  $s$  definiert durch

$$s = \sqrt[3]{\frac{(z - a_1)(z - a_2)}{(z - b_1)(z - b_2)}}.$$

Nach dem früher (§ 4, Beisp. 4<sup>o</sup>) Ausgeführten hat  $s$  Verzweigungspunkte an den Stellen  $z = a_1, a_2, b_1, b_2$ . Verbindet  $\Sigma$  die Verzweigungspunkte in dieser Reihenfolge, so liefern die Substitutionen:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_3 = S_1$$

die Zuordnung der Wurzeln längs  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ , und die Profilzeichnungen Fig. 21a resp. b stellen den Zusammenhang der Blätter  $E_1, E_2, E_3$  längs  $\overline{a_1 a_2}, \overline{b_1 b_2}$ , resp.  $\overline{a_2 b_1}$  dar.

Verbindet  $\Sigma$  die Verzweigungspunkte in der Reihenfolge  $a_1, b_1, a_2, b_2$ , so ist längs der von  $b_1$  bis  $a_2$  gehenden Abteilung von  $\Sigma$  die Zuordnung der Wurzeln durch die identische Substitution gegeben, während den Abteilungen  $\overline{a_1 b_1}, \overline{a_2 b_2}$  die Substitution

$$S_1 = S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

entspricht. — Die Heftung der Blätter von  $T$  ist also bei der letzteren Anordnung der Verzweigungspunkte einfacher, wie bei den ersteren.

Aufgabe: Es soll die zur Grundgleichung

$$8zs^3 + 3(1 - z)s + (1 - z) = 0$$

gehörige Fläche  $T$  konstruiert, und angegeben werden, wie sich die Zusammenheftung der Blätter ändert, wenn die Reihenfolge, in welcher  $\Sigma$  die Verzweigungspunkte  $z = -1, 0, +1$  verbindet, geändert wird.

## § 12. Die algebraischen Funktionen der Klasse; ihre Residuen und Ordnungszahlen.

Die durch die Grundgleichung  $F = 0$  definierte algebraische Funktion  $s$  von  $z$  ist eindeutige Funktion des Ortes in der zu  $F = 0$  gehörigen Fläche  $T$ ; sie ist aber



nicht die einzige Funktion, der diese Eigenschaft zukommt, denn, wie unmittelbar ersichtlich, läßt sich jede rationale Funktion von  $s$  und  $z$  der Fläche  $T$  eindeutig zuordnen. — Wir nennen mit Riemann jede Funktion, die eindeutige Funktion des Ortes in  $T$  ist, **verzweigt wie die Fläche  $T$** . Die Gesamtheit dieser **gleichverzweigten** Funktion bildet eine **Klasse**, und wir nennen deshalb eine wie  $T$  verzweigte Funktion auch kurz eine **Funktion der Klasse**. — Über diese Funktionen der Klasse, zu denen jedenfalls die rationalen Funktionen von  $s$  und  $z$  gehören, leiten wir im Folgenden eine Reihe äußerst wichtiger Sätze ab.

**Satz I<sup>o</sup>)** Jede Funktion  $\sigma$  der Klasse, die in  $T$  nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, ist eine algebraische Funktion von  $z$ .

Beweis: Bezeichnen  $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$  die Werte von  $\sigma$  in  $n$  übereinanderliegenden Punkten von  $T$ , so ist

$$f = (t - \sigma_1)(t - \sigma_2) \dots (t - \sigma_n) \\ = t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n,$$

wo  $t$  einen fest, aber willkürlich angenommenen Parameter bedeutet, eine in der einfachen  $z$ -Ebene einwertige Funktion von  $z$ . Die Koeffizienten  $A_1, \dots, A_n$  sind daher, wegen der Willkürlichkeit von  $t$ , ebenfalls einwertige Funktionen von  $z$ , und überdies, infolge unserer Voraussetzung über das Unendlichwerden von  $\sigma$ , sogar rationale Funktionen von  $z$ . Die Werte  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sind also Wurzeln einer Gleichung:

$$\sigma^n + A_1 \sigma^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

in der die Koeffizienten rationale Funktionen von  $z$  sind, d. h.  $\sigma$  ist eine algebraische Funktion von  $z$ .

**Satz II<sup>o</sup>)** Jede Funktion  $\sigma$  der Klasse, die in  $T$  nirgends unendlich wird, ist eine Konstante.

Beweis: Die Koeffizienten  $A_1 \dots A_n$  der algebraischen Gleichung:

$$\sigma^n + A_1 \sigma^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

welche  $\sigma$  mit  $z$  verbindet, sind symmetrische Funktionen der Wurzeln  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  dieser Gleichung. Werden also  $\sigma_1 \dots \sigma_n$

in  $T$  nirgends unstetig, so werden auch  $A_1 \dots A_n$  nirgends unstetig, und sind daher, als einwertige Funktionen von  $z$ , konstant.  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  sind folglich ebenfalls konstant, und zwar hat  $\sigma_1$  in  $E_1$  überall denselben konstanten Wert,  $\sigma_2$  in  $E_2, \dots \sigma_n$  in  $E_n$ . Da ferner die Blätter  $E_1 \dots E_n$  längs der Verzweigungsschnitte alle zusammenhängen und dort stetig in einander übergehen, so haben  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  denselben konstanten Wert, d. h.  $\sigma$  ist konstant, w. z. b. w.

**Satz III<sup>o</sup>)** Jede Funktion  $\sigma$  der Klasse läßt sich, wenn sie in  $T$  nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, als rationale Funktion von  $s$  und  $z$  darstellen.

Beweis: Es seien  $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n$  die Werte von  $\sigma$  in  $n$  übereinander liegenden Punkten von  $T$ ,  $s_1, s_2 \dots s_n$  die Werte von  $s$  in denselben  $n$  Punkten. Bildet man dann\*) mit dem fest, aber willkürlich angenommenen Parameter  $t$ , die Funktion

$$1^o) \quad \psi(t) = \sum_{x=1}^n \frac{\sigma_x}{F'(s_x, z)} \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x},$$

wo  $F'(s_x, z)$  den Wert von  $\frac{\partial F(t, z)}{\partial t}$  für  $t = s_x$  bezeichnet, so ist

$$2^o) \quad \psi(s_x) = \sigma_x, \quad (x = 1, 2 \dots n).$$

Diese Funktion  $\psi(t)$  betrachten wir in ihrer Abhängigkeit von  $t$  und  $z$ .

Wie aus 1<sup>o</sup>) hervorgeht, ist  $\psi(t)$  ganze Funktion von  $t$  vom Höchstgrade  $n-1$ , läßt sich also darstellen in der Form:

$$3^o) \quad \psi(t) = R + R_1 \cdot t + \dots + R_{n-1} \cdot t^{n-1},$$

wo  $R, R_1 \dots R_n$  Funktionen von  $z$  sind. — Aus 2<sup>o</sup>) und 3<sup>o</sup>) ergeben sich die  $n$  Formeln:

$$\sigma_x = R + R_1 \cdot s_x + \dots + R_{n-1} \cdot s_x^{n-1}, \quad (x = 1, 2 \dots n),$$

die zusammen die eine Gleichung

$$4^o) \quad \sigma = R + R_1 \cdot s + \dots + R_{n-1} \cdot s^{n-1}$$

\*) Christoffel. Brioschi's Annalen Bd. X. 1880.

liefern, in der nur noch die Koeffizienten  $R, R_1, \dots R_{n-1}$  als Funktionen von  $z$  zu untersuchen sind.

Läßt man in der einfachen  $z$ -Ebene die Variable  $z$  einen geschlossenen Weg beschreiben, der allen Singularitäten von  $s$  ausweicht, so bilden (Satz IV<sup>o</sup>, § 11) die Endwerte von  $s_1 \dots s_n$  eine Permutation der Anfangswerte, und die Endwerte der  $\sigma_1 \dots \sigma_n$ , gemäß 2<sup>o</sup>), dieselbe Permutation ihrer Anfangswerte. Die  $n$  Summanden

$$\frac{\sigma_x}{F'(s_x, z)} \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x}$$

von  $\psi(t)$  erfahren daher durch diesen Ringweg von  $z$  nur eine Änderung ihrer Reihenfolge; ihre Summe  $\psi(t)$  kehrt also, wenn  $z$  zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt, zu ihrem Anfangswerte zurück, d. h.  $\psi(t, z)$  ist einwertige Funktion von  $z$ . Da dies unabhängig vom Werte von  $t$  der Fall ist, so sind auch  $R, R_1 \dots R_{n-1}$  einwertige Funktionen von  $z$ , und wegen unserer Voraussetzung über das Unendlichwerden von  $\sigma$  sogar rationale Funktionen von  $z$ . — Die Formel 4<sup>o</sup>) stellt also  $\sigma$  dar als ganze Funktion von  $s$  und rationale Funktion von  $z$ . Bringt man diese Formel in die Gestalt:

$$\sigma = \frac{P + P_1 s + \dots + P_{n-1} \cdot s^{n-1}}{S},$$

wo  $P, P_1 \dots P_{n-1}, S$  ganze Funktionen von  $z$  bedeuten, so kann man mit Hilfe der Grundgleichung  $F=0$  in Zähler und Nenner dieses Ausdrucks höhere Potenzen von  $s$  einführen, und erhält  $\sigma$  ausgedrückt als rationale Funktion von  $s$  und  $z$ . — Damit ist der Satz bewiesen.\*)

Gemäß dem eben bewiesenen Satze ist die Gesamtklasse der algebraischen, wie  $T$  verzweigten Funktionen identisch mit der Gesamtklasse aller rationalen Funktionen von  $s$  und  $z$ .

Es sei nun  $\tau$  irgend eine algebraische Funktion der Klasse,  $z = \alpha$  ein Punkt der Fläche  $T$ ; in der Umgebung dieses Punktes läßt sich  $\tau$  in eine Potenzreihe entwickeln,

\*) Einen anderen Beweis giebt Herr Prym, Crelle 1877. pag. 251—261.

die nach Potenzen von  $(z - \alpha)$  oder  $(z - \alpha)^{\frac{1}{\mu}}$  oder  $\frac{1}{z}$  fortschreitet, je nachdem der Punkt  $\alpha$  ein gewöhnlicher Punkt oder ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $\mu$  von  $T$  ist, oder auf einem der Blätter von  $T$  im Unendlichen liegt. Jede dieser Potenzreihen hat ihr bestimmtes Konvergenzgebiet und ist innerhalb dieses Gebietes unbeschränkt integrierbar, d. h. für das Innere eines jeden solchen Konvergenzgebietes erhält man das Integral  $J = \int \tau dz$ , indem man die entsprechende Reihenentwicklung von  $\tau$  gliedweise integriert. In diesen Potenzreihen fassen wir besonders die etwa darin vorkommenden Glieder ins Auge, die von der Form

$$\frac{a}{z - \alpha} \text{ oder } \frac{a}{z}$$

sind, und daher zu  $\int \tau dz$  einen Beitrag

$$\int \frac{a dz}{z - \alpha} = a \cdot \log(z - \alpha) \text{ oder } \int \frac{a dz}{z} = a \cdot \log z$$

liefern. Ein solcher Beitrag wird für  $z = \alpha$ , resp.  $z = \infty$  unendlich; aber diese Art des Unendlichwerdens ist gänzlich verschieden von der der Funktion  $\tau$  selbst. Während  $\tau$  nur algebraisch (oder polar) unstetig wird, wird  $J$ , sobald die Entwicklung von  $\tau$  Glieder von der angegebenen Form enthält, für  $z = \alpha$  resp.  $z = \infty$  unendlich wie  $\log(z - \alpha)$  resp.  $\log z$ , also unendlich wie eine transcendente Funktion.

Wir sagen dann:  $J = \int \tau dz$  wird für  $z = \alpha$ , resp.  $z = \infty$  logarithmisch unstetig. Zugleich ergibt sich, daß  $J$  nur dann für  $z = \alpha$  oder  $z = \infty$  logarithmisch unstetig wird, wenn die Entwicklung von  $\tau$  in der Umgebung dieser Punkte Glieder mit dem Nenner  $(z - \alpha)$  oder  $z$  aufweist.

Versteht man nun mit Cauchy unter dem Residuum  $\text{Res}(\alpha)$  einer Funktion  $f(z)$  in einem Punkte  $z = \alpha$  den Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\alpha} f(z) \cdot dz,$$

wo der Integrationsweg in positiver Richtung um den Punkt  $\alpha$  herumläuft, bis er sich schließt, so erhält man, wenn man die Reihenentwicklung von  $J = \int \tau dz$  berücksichtigt, je nachdem  $z = \alpha$  ein gewöhnlicher Punkt von  $T$  ist, oder ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $\mu$ , oder auf einem Blatte  $E_x$  im Unendlichen liegt:

$$\text{Res}(\alpha) = a,$$

$$\text{Res}(\alpha) = \mu a,$$

$$\text{Res}(\infty_x) = -a.$$

Dieselben Größen nennen wir auch die Gewichte  $G$  der logarithmischen Unstetigkeiten des Integrals der Klasse  $\int \tau dz$  an den betreffenden Stellen. Mit Einführung dieser Bezeichnung ist:

1<sup>o</sup>) für einen gewöhnlichen Punkt  $z = \alpha$ :

$$\frac{a}{z - \alpha} = \frac{G(\alpha)}{z - \alpha},$$

2<sup>o</sup>) für einen Verzweigungspunkt  $z = \alpha$  von der Ordnung  $\mu$ :

$$\frac{a}{z - \alpha} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{G(\alpha)}{z - \alpha},$$

3<sup>o</sup>) für  $z = \infty_x$ :

$$\frac{a}{z} = - \frac{G(\infty_x)}{z}.$$

Bezeichnet man daher mit Jacobi in der Reihenentwicklung  $f = \sum C_r \cdot \varphi^r$  einer Funktion  $f$  nach Potenzen von  $\varphi$ , den Koeffizienten  $C_r$  des Gliedes  $C_r \varphi^r$  symbolisch mit

$$|f|_{\varphi^r}$$

so erhält man, den vorigen drei Fällen entsprechend:

$$1^o) \quad \text{Res}(\alpha) = G(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\alpha} \tau dz = |\tau|_{\frac{1}{z-\alpha}},$$

( $\alpha$  ein gewöhnlicher Punkt von  $T$ ),

$$2^{\circ}) \quad \text{Res}(\alpha) = G(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\alpha} \tau dz = \frac{1}{\mu} \cdot |\tau|_{\frac{1}{s-\alpha}},$$

( $\alpha$  ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $\mu$ ),

$$3^{\circ}) \quad \text{Res}(\infty_x) = G(\infty_x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\infty_x} \tau dz = -|\tau|_{\frac{1}{s}}.$$

Enthält die Entwicklung von  $\tau$  an einer Stelle  $z = \alpha$  oder  $z = \infty_x$  kein Glied von der Form  $\frac{a}{z-\alpha}$  oder  $\frac{a}{z}$ , so hat  $\tau$  an dieser Stelle kein Residuum, oder genauer: das Residuum von  $\tau$  an dieser Stelle ist  $= 0$ .

Für die Residuen einer algebraischen Funktion  $\tau$ , oder die Gewichte der logarithmischen Unstetigkeiten des Integrals der Klasse  $\int \tau dz$  gilt der wichtige:

**Satz IV<sup>o</sup>)** Die Summe aller Residuen einer algebraischen Funktion  $\tau$  der Klasse ist stets gleich Null,

oder

Die Summe der Gewichte aller logarithmischen Unstetigkeiten eines Integrals  $\int \tau dz$  der Klasse ist stets gleich Null.

**Beweis:\*)** Um sämtliche Residuenpunkte (Punkte, in denen  $\tau$  ein Residuum besitzt), von  $\tau$  in  $T$  denken wir uns, in hinreichender Nähe derselben, Kurven angelegt, die sich schließen. Ist der Residuenpunkt ein im Endlichen gelegener, schlichter Punkt von  $T$ , so läuft die Kurve einmal um ihn herum; ist der Residuenpunkt ein Verzweigungspunkt, in dem  $\mu$  Blätter von  $T$  zusammenhängen, so läuft die Kurve  $\mu$ -mal um ihn herum, bevor sie sich schließt; ist endlich der Residuenpunkt der unendlich ferne Punkte  $\infty_x$  des Blattes  $E_x$ , so läßt sich für die Kurve ein Kreis  $\Gamma_x$  nehmen, dessen Radius so groß gewählt ist, daß sämtliche im Endlichen von  $E_x$  gelegenen Unstetigkeitsstellen und Ver-

---

\*) Dieser Beweis ist einer Vorlesung von Christoffel über Abel'sche Funktionen entnommen.

zweigungspunkte innerhalb desselben liegen. Ein positiver Umlauf um  $\infty_x$  ist dann nichts anderes als ein negativer Umlauf um das Innere  $E_x$  von  $\Gamma_x$ .

Diese Kreise  $\Gamma_x$  denken wir uns nun in allen Blättern von  $T$  angelegt und die Fläche  $T$  längs derselben durchgeschnitten. Die unendlich fernen Gebiete von  $T$  geraten dadurch in Wegfall. Aus dem übrig gebliebenen endlichen Stücke  $T_1$  von  $T$  heben wir auch noch alle Unstetigkeitsstellen von  $\tau$  und alle Verzweigungspunkte heraus (nicht nur diejenigen, die Residuenpunkte von  $\tau$  sind), indem wir  $T_1$  längs geschlossener Kurven durchschneiden, die diese Punkte in unmittelbarer Nähe umlaufen. Es entsteht dadurch ein endliches, zusammenhängendes Flächenstück  $T_0$ , in dem keine Singularitäten und keine Residuenpunkte von  $\tau$  mehr liegen, und das zu Randkurven die äußeren Ränder aller um die Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte laufenden geschlossenen Schnitte und die inneren Ränder der Kreisschnitte  $\Gamma_x$  besitzt. Da nun Randkurven, die keinen Residuenpunkt von  $\tau$  einschließen, zur Residuensumme  $S$  von  $x$  keinen Beitrag liefert, so ist

$$S = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{T_0} \tau dz,$$

wo die Integration sich in positiver Richtung über alle Randkurven von  $T_0$  erstreckt. Um dieses Integral ausführen zu können, denken wir uns  $T_0$  auch noch durchgeschnitten längs aller Verzweigungslinien, in denen die Blätter  $E_1 \dots E_n$  zusammenhängen.  $T_0$  zerfällt dadurch in  $n$  einblättrige, endliche Stücke  $E_1^o \dots E_n^o$ , innerhalb deren keine Singularitäten von  $\tau$  mehr vorkommen. Für ein jedes solches Stück  $E_x^o$  ist daher, nach einem Satze von Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{E_x^o} \tau dz = 0,$$

und folglich auch

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{x=1}^n \int_{E_x^o} \tau dz = 0.$$

Diese Integralsumme setzt sich aus zwei Beträgen zusammen: der eine Summand ist

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{T_0} \tau dz = -S,$$

der andere rührt von den Rändern der Verzweigungsschnitte her und ist, wie man leicht einsieht, gleich Null. Man erhält daher schliesslich:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{x=1}^n \int_{E_x^0} \tau dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_0} \tau dz = -S = 0, \text{ d. h. } S = 0.$$

Aus Satz IV<sup>o</sup>) ergibt sich:

Die Anzahl der Residuen einer algebraischen Funktion der Klasse ist entweder  $= 0$  oder  $> 1$ , nie  $= 1$ . Ist speziell die Anzahl der Residuen gleich 2, so müssen diese Residuen entgegengesetzt gleich sein. — Dasselbe gilt von den den Residuen gleichen Gewichten.

Dieses Resultat ist die Erweiterung eines Satzes aus der Lehre der einwertigen, doppelperiodischen Funktionen.

Für die algebraische Funktion  $s$  von  $z$  haben wir früher bewiesen, daß sie als Funktion von  $z$ , d. h. in der Fläche  $T$ , nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen besitzt und in diesen Stellen nur zu endlicher Ordnung  $\infty$  wird. Dies überträgt sich, auf Grund der Sätze dieses Paragraphen, unmittelbar auf jede algebraische Funktion  $\tau$  der Klasse und gilt also auch von der Funktion  $\frac{1}{\tau}$ . Die Unstetigkeitsstellen von  $\frac{1}{\tau}$  sind aber die Nullpunkte von  $\tau$ ; wir können somit

auch sagen: jede algebraische Funktion  $\tau$  der Klasse besitzt in  $T$  nur eine endliche Anzahl von Nullpunkten und wird in diesen Punkten nur zu endlicher Ordnung Null.

Wir definieren nun: als unendlich kleine GröÙe erster Ordnung sehen wir in einem gewöhnlichen Punkte  $z = z_0$  von  $T$  die GröÙe:

$$z - z_0,$$



in einem Verzweigungspunkte  $z = \zeta$  von der Ordnung  $\mu$  die Größe

$$(z - \zeta)^{\frac{1}{\mu}},$$

für  $z = \infty$  die Größe  $\frac{1}{z}$  an.

Ist dann:

$$\text{für } z = z_0: \tau = (z - z_0)^{\kappa} [A + A_1(z - z_0) + \dots],$$

$$, \quad z = \zeta: \tau = (z - \zeta)^{\lambda} [A + A_1(z - \zeta)^{\frac{1}{\mu}} + \dots],$$

$$, \quad z = \infty: \tau = \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu} \left[A + \frac{A_1}{z} + \dots\right],$$

wo die  $A \neq 0$  und die Exponenten  $\kappa, \lambda, \nu$  positive oder negative ganze Zahlen sind, so nennen wir  $\kappa, \lambda, \nu$  die Ordnungszahlen von  $\tau$  in den Punkten  $z = z_0, \zeta, \infty$  und sagen:  $\tau$  wird in diesen Punkten 0 oder  $\infty$  zu den Ordnungen  $\kappa, \lambda, \nu$ , je nachdem diese Ordnungszahlen positiv oder negativ sind.

Es gilt nun der

**Satz V<sup>o</sup>)** Die Summe der Ordnungszahlen einer algebraischen Funktion  $\tau$  der Klasse ist stets gleich Null.

Beweis: Die Funktion  $\tau_1 = \frac{d \log \tau}{dz} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz}$  ist eine algebraische Funktion der Klasse; ihre Entwicklungen in  $z_0, \zeta, \infty$  lauten:

$$\text{in } z = z_0: \tau_1 = \frac{\kappa}{z - z_0} + \frac{A_1 + 2A_2(z - z_0) + \dots}{A + A_1(z - z_0) + \dots},$$

$$\text{in } z = \zeta: \tau_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{z - \zeta} + \frac{\frac{1}{\mu} \cdot A_1(z - \zeta)^{\frac{1-\mu}{\mu}} + \dots}{A + A_1(z - \zeta)^{\frac{1}{\mu}} + \dots},$$

$$\text{in } z = \infty: \tau_1 = -\frac{\nu}{z} + \frac{-\frac{A_1}{z^2} + \dots}{A + \frac{A_1}{z} + \dots}.$$

Die Ordnungszahlen von  $x, \lambda, \nu$  von  $\tau$  in den Punkten  $z_0, \zeta, \infty$  sind also zugleich Residuen von  $\tau_1$  an diesen Stellen, und außerhalb der Null- und Unstetigkeitspunkte von  $\tau$  besitzt  $\tau_1$  kein Residuum. Die Summe aller Ordnungszahlen von  $\tau$  ist daher gleich der Summe der Residuen von  $\tau_1$  in  $T$ , d. h. nach Satz IV<sup>o</sup>), gleich Null.

Da einem Nullpunkte von  $\tau$  eine positive, einem Unstetigkeitspunkte dieser Funktion eine negative Ordnungszahl entspricht, so ist nach dem vorigen Satze die Summe der Ordnungen, zu denen  $\tau$  in der Fläche  $T$  Null wird, gleich der Summe der Ordnungen, zu denen  $\tau$  in  $T$  gleich  $\infty$  wird. Diese für ein gegebenes  $\tau$  konstante Summe der Ordnungen des Unendlichwerdens heisst die Ordnung der Funktion  $\tau$ .

Wird  $\tau$  in einem Punkte  $z = z_0$  von  $T$  gleich  $0^k$  resp.  $\infty^k$ , so werden wir späterhin wohl auch sagen: in dem Punkte  $z = z_0$  liegen  $k$  Null- resp. Unstetigkeitspunkte erster Ordnung von  $\tau$  vereinigt. Mit Anwendung dieser Ausdrucksweise läßt sich die Ordnung  $q$  von  $\tau$  auch wie folgt definieren:

Die Ordnung  $q$  einer algebraischen Funktion  $\tau$  der Klasse ist gleich der Anzahl der vereinigt oder getrennt liegenden Punkte von  $T$ , in denen  $\tau$  zur ersten Ordnung unendlich wird.

Unter Benutzung derselben Ausdrucksweise nimmt Satz V<sup>o</sup>) die Form an:

**Satz V<sup>o</sup>.)** Eine algebraische Funktion  $\tau$  der Klasse wird in  $T$  ebenso oft Null wie unendlich.

Beachtet man schliesslich, daß die Funktion  $\tau - a$  ( $a = \text{constans}$ ) an denselben Stellen und zu derselben Ordnung wie  $\tau$  unendlich wird, also dieselbe Ordnung wie  $\tau$  besitzt, so ergibt sich der

**Satz VI<sup>o</sup>.)** Eine algebraische Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q$  nimmt jeden bestimmten konstanten Wert  $a$  in  $q$  vereinigt oder getrennt liegenden Punkten von  $T$  an.

---

### § 13. Beziehungen zwischen algebraischen Funktionen der Klasse.

Bis jetzt sind die durch die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  verbundenen Funktionen  $s$  und  $z$  der Klasse als Fundamental-funktionen der Klasse angesehen worden, durch die sich jede Funktion  $\tau$  der Klasse\*) rational ausdrücken läßt. Wir nehmen nun irgend zwei andere Funktionen der Klasse  $S$  und  $Z$ , von den Ordnungen  $\mu$  und  $\nu$ , und untersuchen die Frage, ob nicht, wie  $s$  und  $z$ , so auch  $S$  und  $Z$  durch eine algebraische Gleichung verbunden sind, und ob irgend eine Funktion der Klasse sich auch durch  $S$  und  $Z$  darstellen läßt. Die Antwort wird eine bejahende sein.

Wir untersuchen zuerst  $S$  als Funktion von  $Z$ .

Zu dem Zwecke denken wir uns  $Z$  als komplexe Variable in einer  $Z$ -Ebene, und sehen nach, wie  $S$  sich ändert, wenn  $Z$  in dieser  $Z$ -Ebene Ringwege durchläuft. — Jedem Punkte  $Z = A$  der  $Z$ -Ebene entsprechen  $\nu$  Punkte der Fläche  $T$ , in denen  $Z$  denselben Wert  $A$  besitzt. Diese  $\nu$  Punkte liegen im allgemeinen getrennt in  $T$ , und es fallen nur dann mehrere von ihnen an einer bestimmten Stelle von  $T$  zusammen, wenn an dieser Stelle die Differenz  $Z - A$  zu höherer Ordnung als der ersten Null wird. Es seien

$$A_1, A_2, \dots, A_k$$

diejenigen Punkte der  $Z$ -Ebene, denen weniger als  $\nu$  Punkte von  $T$  entsprechen. Läßt man dann  $Z$  in der  $Z$ -Ebene einen Ringweg  $l$  beschreiben, der allen Punkten  $A_1 \dots A_k$  ausweicht, so entsprechen ihm in  $T$   $\nu$  Wege  $l_1 \dots l_\nu$ , die allen Punkten ausweichen, in denen  $Z$  einen der Werte  $A_1 \dots A_k$  besitzt. Diese  $\nu$  Wege verlaufen also in  $T$  völlig getrennt und schneiden sich nicht: ihre Endpunkte bilden auf jeden Fall eine Permutation ihrer Anfangspunkte.

Sind jetzt  $S_1, S_2, \dots, S_\nu$

die Werte von  $S$  in den  $\nu$  Punkten  $Z = A$  von  $T$ , so bilden wir das Polynom:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= (t - S_1)(t - S_2) \dots (t - S_\nu) \\ &= t^\nu + P_1 \cdot t^{\nu-1} + P_2 \cdot t^{\nu-2} + \dots + P_\nu \end{aligned}$$

\*) Unter einer Funktion der Klasse verstehen wir von hier ab immer eine algebraische Funktion der Klasse. —

wo  $t$  ein verfügbarer Parameter ist. Läßt man  $Z$  in der  $Z$ -Ebene einen Ringweg  $l$  durchlaufen, der allen Punkten  $A_1 \dots A_k$  ausweicht, so bilden die Endpunkte der diesem Ringwege entsprechenden Wege  $l_1 \dots l_r$  in  $T$  eine Permutation ihrer Anfangspunkte, und die Endwerte, die  $S$  in den Endpunkten dieser Wege erlangt, bilden dieselbe Permutation der Anfangswerte  $S_1, \dots, S_r$ . Der Ringweg  $l$  von  $Z$  führt also  $\psi(t)$  zu seinem Anfangswerte zurück, d. h.  $\psi(t)$  ist einwertige Funktion von  $Z$ , und dasselbe gilt, da  $t$  willkürlich ist, auch von  $P_1, \dots, P_r$ . Da ferner  $S$  als Funktion der Klasse in  $T$  nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, so gilt dies auch von  $\psi(t)$ . Als einwertige Funktion von  $Z$  ist daher  $\psi(t)$  rationale Funktion von  $Z$ , und ebenso sind  $P_1, \dots, P_r$  rational in  $Z$ . Setzt man

$$P_1 = \frac{Q_1}{Q}, \dots, P_r = \frac{Q_r}{Q},$$

wo  $Q, Q_1 \dots Q_r$  ganze Funktionen von  $Z$  sind, so erhält man für  $\psi(t)$  den Ausdruck:

$$\psi(t) = \frac{Q \cdot t^r + Q_1 t^{r-1} + \dots + Q_r}{Q},$$

und es sind folglich  $S_1 \dots S_r$  die Wurzeln einer algebraischen Gleichung:

$$Q \cdot S^r + Q_1 \cdot S^{r-1} + \dots + Q_r = 0.$$

Betrachtet man schließlich, daß  $S$ , als Funktion der Klasse von der Ordnung  $\mu$ , denselben Wert in  $\mu$  Punkten von  $T$  annimmt, daß also einem Werte von  $S$   $\mu$  Werte von  $Z$  entsprechen, so ergibt sich der

**Satz I<sup>o</sup>)** Sind  $S$  und  $Z$  zwei beliebige Funktionen der Klasse von den Ordnungen  $\mu$  und  $\nu$ , so besteht zwischen ihnen stets eine algebraische Gleichung von der Form:

$$\text{I}^o) \quad \psi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = 0.$$

Bemerkung: Sind

$$S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z)$$

die Gleichungen, welche  $S$  und  $Z$  rational durch  $s$  und  $z$  ausdrücken, so läßt sich die Gleichung  $\Psi=0$  auffassen als Resultat der Elimination von  $s$  und  $z$  zwischen den drei Gleichungen  $S=R_1$ ,  $Z=R_2$ ,  $F=0$ . Näheres hierüber in Kap. V.

Die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$ , von der wir ausgegangen sind, war irreducibel. Ist dies auch bei der Gleichung I<sup>o</sup>) der Fall? — In dieser Beziehung gilt der

**Satz II<sup>o</sup>)** Die Gleichung I<sup>o</sup>) ist stets und nur dann irreducibel, wenn es mindestens einen Wert  $Z_0$  von  $Z$  giebt, für den die  $\nu$  entsprechenden Werte  $S_1, \dots, S_\nu$  von  $S$  ungleich sind.

Beweis 1<sup>o</sup>) Es seien für  $Z=Z_0$  die Werte  $S_1 \dots S_\nu$  alle von einander verschieden. Wir zerlegen dann das Polynom  $\psi(t) = (t - S_1) \dots (t - S_\nu)$  auf beliebige Weise in zwei Faktoren:

$$\psi(t) = \psi_1(t) \cdot \psi_2(t),$$

wo

$$\psi_1(t) = (t - S_1) \dots (t - S_x),$$

$$\psi_2(t) = (t - S_{x+1}) \dots (t - S_\nu)$$

sei, und untersuchen, ob ein beliebiger Ringweg in der  $Z$ -Ebene jeden dieser Faktoren wieder zu seinem Anfangswerte zurückführt.

In der Fläche  $T$  legen wir einen Weg  $l_1$  an, der von dem Punkte  $(S_1, Z_0)$  ausgeht, allen Punkten von  $T$  ausweicht, in denen  $Z$  einen der früher erwähnten Werte  $A_1 \dots A_k$  annimmt, und in  $(S_1, Z_0)$  endigt. Diesem Wege entspricht in der  $Z$ -Ebene ein Ringweg  $l$ , der vom Punkte  $Z_0$  ausgeht, allen Punkten  $A_1 \dots A_k$  ausweicht und wieder in  $Z_0$  endigt. Diesem Ringwege hinwieder entsprechen in  $T$ , außer  $l_1$  noch weitere  $\nu - 1$  Wege  $l_2 \dots l_\nu$ . Der Ringweg  $l$  führt dann  $t - S_1$  über in  $t - S_2$ , während die anderen Wurzelfaktoren von  $\psi(t)$  auf eine nicht näher bestimmte Weise ihre Reihenfolge vertauschen. Der Endwert von  $\psi_1(t)$  enthält also jedenfalls einen Faktor  $t - S_1$ , den der Anfangswert nicht hatte. Der Ringweg  $l$  in der  $Z$ -Ebene führt daher  $\psi_1(t)$  nicht zu seinem Anfangswerte zurück, d. h. kein Faktor  $\psi_1(t)$  von  $\psi(t)$  ist einwertige Funktion



einen beliebigen Wurzelfaktor  $t - S_\lambda$  von  $\psi_2$  übergeht. Da nach Voraussetzung  $\psi_1$  und  $\psi_2$  irreducibel sind und die höchste Potenz von  $t$  in  $\psi_1$  und  $\psi_2$  den Koeffizienten 1 hat, so muß daher  $\psi_1$  identisch mit  $\psi_2$  sein. Durch Wiederholung dieser Schlussweise ergibt sich, daß  $\psi_1$  mit allen übrigen irreducibeln Faktoren von  $\psi(t)$  identisch ist, daß also

$$\psi = \psi_1^q$$

ist. Denkt man sich nun  $\psi_1(t)$  nach Potenzen von  $t$  geordnet:

$$\psi_1(t) = t^x + R_1 \cdot t^{x-1} + \dots + R_x,$$

und die rationalen Funktionen  $R_1 \dots R_x$  von  $Z$  auf den gemeinsamen Nenner  $M$  gebracht:

$$R_1 = \frac{M_1}{M}, \dots R_x = \frac{M_x}{M},$$

so erhält man:

$$\psi_1(t) = \frac{M \cdot t^x + M_1 \cdot t^{x-1} + \dots + M_x}{M} = \frac{\Phi\left(t, \frac{\lambda}{Z}\right)}{M},$$

$$\psi(t) = \frac{[\Phi\left(t, \frac{\lambda}{Z}\right)]^q}{M^q},$$

wo  $\lambda$  den höchsten Grad bezeichnet, zu dem die ganzen Funktionen  $M, M_1 \dots M_x$  von  $Z$  in  $Z$  ansteigen. Hieraus ergibt sich schließlic

$$\text{II}^\circ) \quad \psi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = [\Phi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\lambda}{Z}\right)]^q, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Zwischen je zwei algebraischen Funktionen der Klasse  $S$  und  $Z$  von den Ordnungen  $\mu$  und  $\nu$  besteht also auf jeden Fall eine irreducibele algebraische Gleichung. Gibt es einen Wert von  $Z$  für den die  $\nu$  entsprechenden Werte von  $S$  ungleich sind, so ist diese Gleichung in  $S$  vom Grade  $\nu$ , in  $Z$  vom Grade  $\mu$ . Gibt es keinen solchen Wert von  $Z$ , so ist die zwischen  $S$  und  $Z$  bestehende irreducibele Gleichung in  $S$  und  $Z$  nicht mehr von den Graden  $\nu$  und  $\mu$ , sondern von den Graden

$$x = \frac{\nu}{q}, \quad \lambda = \frac{\mu}{q},$$

wo  $q$  eine ganze Zahl bedeutet, die  $> 1$ , im allgemeinen nicht näher bestimmt ist und in  $\nu$  und  $\mu$  ohne Rest aufgeht.

An Satz III<sup>o</sup>) schliessen sich unmittelbar folgende Bemerkungen an:

1<sup>o</sup>) Sind  $\nu$  und  $\mu$  relative Primzahlen, so ist  $q=1$ ; die  $S$  und  $Z$  verbindende irreducibele Gleichung ist dann in  $S$  vom Grade  $\nu$ , in  $Z$  vom Grade  $\mu$ .

2<sup>o</sup>) Ist die zwischen  $S$  und  $Z$  bestehende irreducibele Gleichung nicht von den Graden  $\nu$  und  $\mu$ , und ist ausserdem eine dieser Zahlen, etwa  $\nu$ , eine absolute Primzahl, so muß  $q=\nu$  sein. Es ist dann

$$\psi(t) = (t - S_1)^\nu, \text{ d. h. } S_1 = S_2 = \dots = S_\nu.$$

In diesem Falle ist  $S$  einwertige Funktion von  $Z$ , und da sie als algebraische Funktion von  $Z$  nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, auch rationale Funktion von  $Z$ . — Will man diesen Fall wirklich konstruieren, so genügt es, für  $Z$  irgend eine Funktion der Klasse zu nehmen und für  $S$  eine rationale Funktion von  $Z$ .

Wir kommen nun zur Beantwortung der zweiten, eingangs dieses Paragraphen gestellten Frage, ob sich irgend eine Funktion  $\tau$  der Klasse, wie durch  $s$  und  $z$ , so auch durch  $S$  und  $Z$  rational darstellen lasse.

Zur Erledigung dieser Frage interpolieren wir  $\tau$  durch  $S$  mit Hilfe der Lagrange'schen Interpolationsformel:

$$\varphi(t) = \sum_{x=1}^{\nu} \frac{\tau_x}{\psi'(S_x, Z)} \cdot \frac{\psi(t, Z)}{t - S_x},$$

worin  $\tau_1, S_1, \dots, \tau_\nu, S_\nu$  die Werte bezeichnen, die  $\tau, S$  in  $\nu$  Punkten von  $T$  annehmen, in denen  $Z$  denselben Wert besitzt. Dieser Ausdruck  $\varphi(t)$  hat nur dann einen wirklichen Sinn, wenn  $\psi'(S, Z)$  nicht für jedes  $Z$  Null wird, d. h. wenn nur ausnahmsweise für gewisse Werte von  $Z$  zwei oder mehr der Werte  $S_1 \dots S_\nu$  einander gleich werden. Unter dieser Voraussetzung, die, wie schon bewiesen, die Irreducibilität von  $\psi(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}) = 0$  nach sich zieht, ist:

$$\varphi(S_x) = \tau_x \quad \text{für } x = 1, 2 \dots \nu.$$



Wir untersuchen nun  $\varphi(t)$  als Funktion von  $Z$  und als Funktion des willkürlichen Parameters  $t$ .

1<sup>o</sup>) Setzt man, der Abkürzung halber:

$$\sigma = \tau \cdot \frac{1}{t - S} \cdot \frac{\psi(t, Z)}{\psi'(S, Z)} = \tau \cdot q,$$

so daß

$$\varphi(t) = \sum_{x=1}^{\nu} \sigma_x$$

wird, so folgt:  $q$  ist rational in  $S$  und  $Z$ , wird also nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich. Letzteres gilt auch von der Funktion  $\tau$  der Klasse und daher gleichfalls von  $\sigma_1 \dots \sigma_\nu$  und von  $\varphi(t)$  selbst.

Bezeichnet ferner  $l$  einen Ringweg in der  $Z$ -Ebene, der  $S_1$  etwa in  $S_2$  überführt, so wird dabei zugleich  $\tau_1$  in  $\tau_2$  übergeführt, und daher  $\sigma_1$  in  $\sigma_2$ . Irgend ein Ringweg in der  $Z$ -Ebene bringt also nur eine Permutation der Summanden  $\sigma_1 \dots \sigma_\nu$  von  $\varphi(t)$  hervor und führt somit  $\varphi(t)$  wieder zu seinem Anfangswerte zurück, d. h.  $\varphi(t)$  ist einwertige Funktion von  $Z$ , und da sie außerdem nur zu endlicher Ordnung und nicht unendlich oft unendlich wird, rationale Funktion von  $Z$ .

2<sup>o</sup>) Aus

$$\psi'(t, Z) = Q \cdot (t - S_1) \dots (t - S_\nu)$$

folgt:  $\varphi(t)$  ist ganze Funktion von  $t$ , und als solche höchstens vom Grade  $\nu - 1$ . Zusammen mit dem Umstande, daß nach 1<sup>o</sup>)  $\varphi(t)$  rationale Funktion von  $Z$  ist, liefert dies für  $\varphi(t)$  den Ausdruck:

$$\varphi(t) = \frac{L_1 \cdot t^{\nu-1} + L_2 \cdot t^{\nu-2} + \dots + L_\nu}{M},$$

worin  $L_1, \dots, L_\nu, M$  ganze Funktionen von  $Z$  sind. Gemäß  $\varphi(S_x) = \tau_x$  ergeben sich hieraus die  $\nu$  Formeln:

$$\tau_x = \frac{L_1 \cdot S_x^{\nu-1} + \dots + L_\nu}{M} \quad (x = 1, 2, \dots, \nu),$$

welche mit der einen Gleichung

$$\text{III}^o) \quad \tau = \frac{L_1 \cdot S^{\nu-1} + L_2 \cdot S^{\nu-2} + \dots + L_\nu}{M}$$

äquivalent sind. — Mit Hilfe der zwischen  $S$  und  $Z$  bestehenden irreducibeln Gleichung I<sup>o</sup>) läßt sich dieser in  $S$  ganze, in  $Z$  rationale Ausdruck III<sup>o</sup>) in einen in  $S$  und  $Z$  rationalen Ausdruck umformen. Nennen wir daher zwei Funktionen  $S$  und  $Z$  der Klasse, die so geartet sind, daß nicht für jeden Wert der einen Funktion  $Z$  zwei oder mehr der entsprechenden Werte der andern Funktion  $S$  einander gleich werden, gegenseitig irreducibele oder irrationale Funktionen der Klasse, so können wir den Satz aussprechen:

**Satz IV<sup>o</sup>)** Jede Funktion  $\tau$  der Klasse läßt sich darstellen als rationale Funktion von irgend zwei gegenseitig irreducibeln Funktionen  $S, Z$  der Klasse.

Aus diesem Satze, der eine Erweiterung von Satz III<sup>o</sup>), § 12 ist, ergibt sich schliesslich das wichtige Resultat:

**Satz V<sup>o</sup>)** Bezeichnen  $S$  und  $Z$  irgend zwei gegenseitig irreducibelen Funktionen von den Ordnungen  $\mu$  und  $\nu$  aus der durch die irreducibele Grundgleichung  $F\left(\overset{\mu}{s}, \overset{\nu}{z}\right) = 0$  definierten Klasse algebraischer Funktionen, so sind die zwei durch die irreducibeln Gleichungen  $F\left(\overset{\mu}{s}, \overset{\nu}{z}\right) = 0$  und  $\psi\left(\overset{\mu}{S}, \overset{\nu}{Z}\right) = 0$  definierten Funktionenklassen identisch.

Auf diesem Satze beruht die Theorie der birationalen Transformationen.

## § 14. Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

Durch Einführung der Fläche  $T$  haben wir uns ein Gebiet geschaffen, innerhalb dessen jede algebraische Funktion  $\tau$  der Klasse sich wie eine eindeutige Funktion des Ortes verhält, innerhalb dessen also die das Studium dieser Funktionen erschwerende Vieldeutigkeit aufgehoben ist. Für das Studium der Integrale der Funktionen der Klasse ist damit aber noch nicht alles Wünschenswerte geleistet. Läßt man z. B. die Variable  $z$  in der Fläche  $T$  einen Ringweg  $\iota$

beschreiben, und bildet man das Integral  $\int_l r dz$ , wo die Integration sich in positiver Richtung über  $l$  erstreckt, so wird der Wert dieses Integrals durch die Cauchy'schen Residuensätze über einwertige Funktionen nur dann gegeben, wenn außerdem feststeht, daß  $l$  ein Stück  $A$  von  $T$  vollständig begrenzt, d. h. so begrenzt, daß man von keinem Punkte von  $A$  zu irgend einem Punkte des übrig bleibenden Restes  $B$  von  $T$  gelangen kann, ohne den Ringweg  $l$  zu überschreiten.

Daß es in der That Ringwege  $l$  in  $T$  geben kann, die kein Flächenstück von  $T$  vollständig begrenzen, ist leicht einzusehen. Legt man nämlich in der zweiblättrigen Fläche der hyperelliptischen Funktionen (Beisp. 1<sup>o</sup>), § 10), einen Ringweg  $l$  an, der ganz im Blatte  $E_1$  verläuft und die zwei Verzweigungspunkte  $\alpha$  und  $\alpha_1$  umschließt, so schließt dieser Ringweg kein Stück von  $T$  vollständig ein; denn man kann immer noch auf einem Wege, der  $l$  nicht überschreitet, von irgend einem Punkte innerhalb  $l$  nach einem beliebigen Punkte in  $E_1$  oder  $E_2$  gelangen. — Bei dieser speziellen Fläche  $T$  sagt uns die Anschauung unmittelbar, wann ein Ringweg in  $T$  ein Stück von  $T$  vollständig begrenzt, und wann nicht. Bei allgemeinen Flächen dagegen ist dies nicht mehr der Fall; dort kann uns über diese Frage die Anschauung allein nicht mehr Aufschluß geben. Es muß daher, bevor wir an das Studium der Integrale der Klasse gehen, eine allgemeine Theorie eingeschaltet werden, welche diesen Mangel an Anschaulichkeit bei der Fläche  $T$  wieder gut macht. Als Resultat dieser Theorie wird sich herausstellen, daß die Fläche  $T$  durch gewisse in ihr anzulegende Schnitte, sogenannte Querschnitte, stets so umgeformt werden kann, daß nach Ausführung dieser Schnitte jeder Ringweg ein Stück der Fläche vollständig begrenzt.

Um den Gültigkeitskreis der im Folgenden abzuleitenden Resultate nicht unnötig einzuschränken, fassen wir zunächst ganz allgemeine, beliebig gestaltete Flächen  $F$  ins Auge, die nur an folgende Voraussetzungen gebunden seien:

1<sup>o</sup>) sie seien zusammenhängend, d. h. es sei möglich, von irgend einem Punkte von  $F$  zu irgend einem anderen Punkte von  $F$  zu gelangen, ohne aus der Fläche herauszutreten;

2<sup>o</sup>) sie seien bilateral, d. h. sie mögen den Raum so in zwei Teile zerlegen, daß es unmöglich ist, aus einem Teile in den anderen zu gelangen, ohne durch die Fläche hindurchzudringen;

3<sup>o</sup>) sie mögen sich nicht längs einer Linie in mehrere Blätter spalten oder isolierte Punkte besitzen, in denen mehrere Blätter zusammenhängen.

In einer solchen Fläche sind drei Arten von Schnitten möglich:

a<sup>o</sup>) Punktschnitte: Dieselben entstehen, wenn man in  $F$  irgendwo einen Punkt  $\alpha$  sich herausgenommen denkt; durch einen Punktschnitt wird  $F$  eine geschlossene Randkurve erteilt. Wir werden im Folgenden dann noch von einem Punktschnitte sprechen, wenn wir von  $\alpha$  aus nach verschiedenen Seiten hin Schnitte ziehen, die sich nicht schließen (Fig. 22, No. 1 und 2); immer aber wird der Fläche  $F$  durch einen Punktschnitt eine geschlossene Randkurve erteilt.

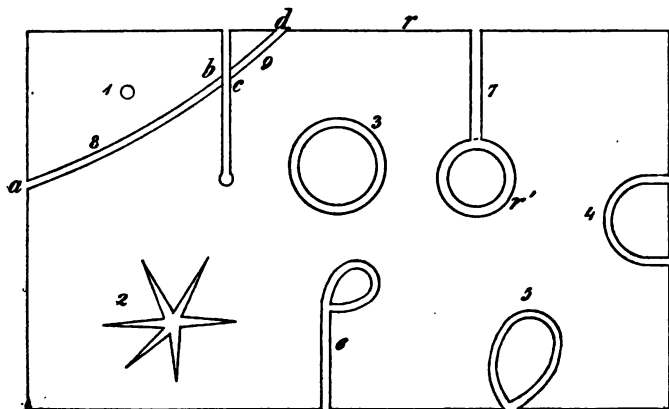


Fig. 22.

b<sup>o</sup>) Rückkehrschnitte: Ein solcher Schnitt entsteht, wenn man von einem Punkte der Fläche ausgehend, in  $F$  einen Schnitt anlegt, der zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt. Ein Rückkehrschnitt erteilt  $F$  zwei geschlossene Randkurven, die zwei Bänder des Schnittes (Fig. 22, No. 3).

$\epsilon^0$ ) Querschnitte: Dieselben entstehen, wenn man von einem Punkte einer Randkurve von  $F$  aus einen Schnitt führt, der wieder in einem Punkte einer Randkurve von  $F$  endigt. Ein Querschnitt ist also nur möglich, wenn  $F$  bereits mindestens eine Randkurve besitzt. Es giebt drei Arten von Querschnitten:

$\alpha^0$ ) Anfangs- und Endpunkt des Querschnittes liegen auf einer und derselben Randkurve (Fig. 22, No. 4 und 5). Ein solcher Schnitt vermehrt die Anzahl der Randkurven von  $F$  um 1.

$\beta^0$ ) Der Querschnitt geht von einem Punkte einer Randkurve von  $F$  aus und endigt in sich selbst (Fig. 22, No. 6). Ein solcher Schnitt vermehrt ebenfalls die Anzahl der Randkurven von  $F$  um 1.

$\gamma^0$ ) Der Querschnitt  $Q$  geht von einem Punkte einer Randkurve  $r$  aus und endigt in einem Punkte einer anderen Randkurve  $r'$  (Fig. 22, No. 7<sup>o</sup>). Ein solcher Schnitt vermindert die Anzahl der Randkurven von  $F$  um 1, da jetzt  $r, Q, r'$  nur mehr eine Randkurve bilden. Wie leicht einzusehen, wird  $F$  durch einen Querschnitt dieser Art nie in Stücke zerlegt. — Wir werden einen solchen Querschnitt im Folgenden stets mit  $Q_{-1}$ , die Querschnitte der zwei ersten Arten mit  $Q_{+1}$  bezeichnen. Ein  $Q_{-1}$  zusammen mit einem Rückkehrschnitt bildet einen  $Q_{+1}$ .

Werden in  $F$  mehrere Querschnitte hintereinander angelegt, so ist festzuhalten, daß beim Ziehen eines Querschnittes die früher angelegten Querschnitte, ebenso wie die bereits ausgeführten Teile des Querschnittes selbst als zur Begrenzung gehörig zu nehmen sind. Ein folgender Querschnitt kann also in einem Punkte eines früheren anfangen und auch endigen, oder auch in sich selbst zurückkehren. Stets aber endigt ein Querschnitt, sobald er einen schon bestehenden Rand von  $F$  trifft. Der in einem Zuge angelegte Schnitt 8—9 in Fig. 22 ist daher als aus den zwei Querschnitten  $ab, cd$  bestehend anzusehen.

Wir untersuchen nun, welches der Einfluß der eben besprochenen Schnitte auf eine Fläche  $F$  von den oben angegebenen Eigenschaften ist. — Von besonderem Interesse sind dabei für uns jene Flächen  $F$ , in denen durch jeden Ringweg ein Stück von  $F$  vollständig begrenzt wird. Solche

Flächen heißen, nach Riemann, einfach zusammenhängend; Flächen, bei denen dies nicht der Fall ist, heißen mehrfach zusammenhängend. Einfach zusammenhängend ist z. B. die Fläche eines Kreises, die Fläche eines Rechtecks, allgemein jede ebene Fläche, deren Begrenzung aus einem sich selbst nicht schneidenden Linienzug besteht, ferner sogenannte geschlossene Flächen, wie die Oberfläche einer Kugel, eines Ellipsoids, u. s. w. Mehrfach zusammenhängend ist z. B. die zwischen den zwei Kreisen  $K$  und  $K_1$  in Fig. 23 liegende Ringfläche; denn ein den Kreis  $K$  umschließender Ringweg  $l$  bildet nicht für sich allein die vollständige Begrenzung eines Stückes der Ringfläche, sondern erst zusammen mit dem Kreise  $K$  oder dem Kreise  $K_1$ . Ebenso ist die Mantelfläche eines Cylinders, eines Kegels, die Oberfläche eines ringförmigen Wulstes mehrfach zusammenhängend.

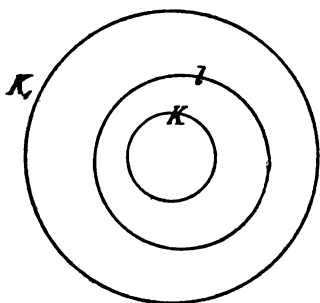


Fig. 23.

Für einfach zusammenhängende Flächen gelten folgende Sätze:

**Satz 1<sup>o</sup>)** Eine einfach zusammenhängende Fläche wird durch jeden Querschnitt in zwei vollständig getrennte Teile zerlegt,

und umgekehrt:

Wird eine Fläche  $F$  durch jeden Querschnitt in zwei völlig getrennte Teile zerlegt, so ist sie einfach zusammenhängend.

Beweis: 1<sup>o</sup>) Angenommen, ein Querschnitt  $Q$  zerstückele  $F$  nicht; dann läßt sich ein  $Q_{-1}$  anlegen, der von einem Punkte  $\alpha$  auf dem einen Rande von  $Q$  zu dem  $\alpha$  auf dem andern Rande gegenüberliegenden Punkte  $\beta$  führt. Durch Anlegen dieses  $Q_{-1}$  wird  $F$  nicht zerstückelt;  $F$  bleibt also auch zusammenhängend, wenn man den Schnitt  $Q$  wieder löscht. Thut man das, so geht  $Q_{-1}$  über in einen Rückkehr-

schnitt, der  $F$  nicht zerstückelt, und dies widerspricht der Voraussetzung, daß  $F$  einfach zusammenhängend sei.

2<sup>o</sup>) Angenommen, die Fläche  $F$ , die durch jeden Querschnitt zerstückelt wird, werde durch einen Rückkehrschnitt  $R$  nicht in Stücke zerlegt; dann läßt sich in  $F$  ein  $Q_{-1}$  anlegen, der von  $R$  nach dem Rande von  $F$  geht, und  $F$  nicht zerstückelt. Dieser  $Q_{-1}$  bildet dann mit  $R$  zusammen einen  $Q_{+1}$ , der  $F$  nicht zerstückelt, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus diesem Satze ergibt sich, daß wir eine einfach zusammenhängende Fläche auch wie folgt definieren können:

**Definition:** Eine Fläche  $F$  heißt einfach zusammenhängend, wenn sie durch jeden Querschnitt in Stücke zerlegt wird.

Diese Definition legen wir von hier an zugleich mit der früher gegebenen zu Grunde. — Es gelten die weiteren Sätze:

**Satz II<sup>o</sup>)** Jede einfach zusammenhängende Fläche hat nur eine Randkurve.

Beweis: Besäße  $F$  zwei Randkurven, so ließe sich zwischen ihnen ein  $Q_{-1}$  anlegen, der  $F$  nicht zerstückelt, was der Voraussetzung widerspricht, daß  $F$  einfach zusammenhängend ist.

**Satz III<sup>o</sup>)** Eine einfach zusammenhängende Fläche  $F$  wird durch jeden Querschnitt in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegt,

und umgekehrt:

wird  $F$  durch einen Querschnitt in zwei einfach zusammenhängende Teile zerlegt, so ist  $F$  einfach zusammenhängend.

Beweis: 1<sup>o</sup>) In  $F$ , das nach Voraussetzung einfach zusammenhängend ist, bildet jeder Ringweg für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächenstücks; dasselbe gilt also auch von jedem Ringweg, der ganz innerhalb eines der zwei Stücke  $A_1$ ,  $A_2$  verläuft, in die  $F$  durch einen bestimmten Querschnitt zerlegt wird.

2<sup>o</sup>) In  $F$  denken wir uns neben dem Querschnitte  $Q$ , der  $F$  in zwei einfach zusammenhängende Stücke zerlegt,

noch einen zweiten Querschnitt  $Q'$  angelegt. Für die Zerfällung von  $F$  ist es dann ganz gleichgültig, ob wir in  $F$  zuerst  $Q$  und hierauf  $Q'$ , oder zuerst  $Q'$  und dann  $Q$  anlegen.

Im ersten Falle zerfällt  $F$ , nach dem ersten Teile dieses Satzes, in

$$3 + x$$

einfach zusammenhängende Teile, wo  $x = 1$  oder  $0$  ist, je nachdem  $Q'$  den Querschnitt  $Q$  schneidet oder nicht.

Im zweiten Falle zerlegt  $Q'$  die Fläche  $F$  in höchstens zwei, d. h. in  $1 + \lambda$  Teile ( $\lambda = 0$  oder  $1$ ), von denen jedoch nicht feststeht, ob sie einfach zusammenhängend sind oder nicht. Legt man hierauf  $Q$  an, so ist  $Q$  gleichbedeutend mit  $1 + x$  Querschnitten, zerlegt also  $F$  in höchstens  $1 + \lambda + 1 + x$ , oder genau in

$$1 + \lambda + 1 + x - \mu = 2 + \lambda + x - \mu$$

Teile, wo für  $\lambda$  die Werte  $0$  und  $1$ , für  $\mu$  die Werte  $0, 1, 2$  in Aussicht zu nehmen sind. Da diese Teile mit den auf dem ersten Wege erhaltenen  $3 + x$  einfach zusammenhängenden Teilen identisch sind, müssen auch sie einfach zusammenhängend sein und es ist

$$3 + x = 2 + \lambda + x - \mu,$$

$$\text{d. h. } 1 = \lambda - \mu.$$

Letzteres ist aber nur möglich, wenn  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$  ist, d. h. wenn der beliebig angelegte Querschnitt  $Q'$  die Fläche  $F$  in zwei Teile zerlegt. Damit ist der Satz bewiesen.

Der zweite Teil des eben bewiesenen Satzes läßt sich auch wie folgt aussprechen:

**Satz III.<sup>o</sup>)** Heftet man zwei einfach zusammenhängende Flächen so aneinander, daß durch Zerschneiden dieser Heftungen ein einziger Querschnitt entsteht, so erhält man eine einfach zusammenhängende Fläche.

In dieser Form werden wir den Satz III.<sup>o</sup>) im nächsten Paragraphen anwenden.



**Satz IV<sup>o</sup>)** Jede einfach zusammenhängende Fläche  $F$  wird durch  $n$  aufeinanderfolgende Querschnitte in  $n+1$  einfach zusammenhängende Teile zerlegt,

und umgekehrt:

Zerfällt eine Fläche  $F$  durch  $n$  aufeinanderfolgende Querschnitte in  $n+1$  einfach zusammenhängende Teile, so ist sie selbst einfach zusammenhängend.

Beweis: 1<sup>o</sup>) Der Beweis ergibt sich durch  $n$ -malige Anwendung des Satzes III<sup>o</sup>) 1<sup>o</sup>).

2<sup>o</sup>) Der Beweis wird in ähnlicher Weise geführt, wie bei Satz 3<sup>o</sup>) 2<sup>o</sup>). — Wir denken uns außer den  $n$  Querschnitten  $Q_1 \dots Q_n$  noch einen weiteren, beliebigen Querschnitt  $Q'$  in  $F$  angelegt. Für das Schlussergebnis, d. h. für die Natur und Zahl der schließlich in  $F$  entstehenden Stücke ist es dann gleichgültig, ob zuerst  $Q_1 \dots Q_n$  angelegt werden und hierauf  $Q'$ , oder umgekehrt zuerst  $Q'$  und dann  $Q_1 \dots Q_n$ .

Legt man den Querschnitt  $Q'$  zuletzt an, so ist er, wenn er  $Q_1 \dots Q_n$   $\nu$ -mal trifft, für  $1 + \nu$  Querschnitte zu zählen. Durch die in der Reihenfolge  $Q_1 \dots Q_n$ ,  $Q'$  angelegten Querschnitte zerfällt also  $F$  in

$$n + 1 + 1 + \nu$$

einfach zusammenhängende Teile. Legt man zuerst  $Q'$  in  $F$  an, so wird  $F$  zerlegt in

$$1 + \lambda \quad (\lambda = 0 \text{ oder } 1)$$

Teile, von denen wir nicht wissen, ob sie einfach zusammenhängend sind oder nicht. Legt man dann weiter  $Q_1 \dots Q_n$  an, so sind diese  $n$  Schnitte für

$$n + \nu$$

Querschnitte zu zählen, zerlegen also schließlich  $F$  in höchstens

$$1 + \lambda + n + \nu,$$

oder genauer in

$$1 + \lambda + n + \nu - \mu$$

Teile, wobei  $\mu$  einen der Werte  $0, 1, 2, \dots, n + \nu$  besitzt. Diese Teile sind identisch mit den auf dem ersten Wege erhaltenen  $n + 1 + 1 + \nu$  einfach zusammenhängenden Teilen, und es ist daher

$$n + 1 + 1 + \nu = 1 + \lambda + n + \nu + \mu,$$

oder

$$1 = \lambda - \mu.$$

Letztere Gleichung kann, zufolge der für  $\lambda$  und  $\mu$  zulässigen Werte, nur erfüllt sein, wenn  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 0$  ist, d. h. wenn der beliebige Querschnitt  $Q'$  die Fläche  $F$  in zwei Teile zerlegt.  $F$  ist also einfach zusammenhängend, w. z. b. w.

**Satz V<sup>o</sup>)** Verwandelt ein Querschnittssystem eine Fläche  $F$  in eine einfach zusammenhängende, so macht jedes andere Querschnittssystem von gleich vielen Querschnitten, das  $F$  nicht zerstückelt,  $F$  ebenfalls einfach zusammenhängend.

Beweis: Es sei  $Q_1 \dots Q_n$  ein Querschnittssystem, das  $F$  einfach zusammenhängend macht,

$Q'_1 \dots Q'_n$  ein Querschnittssystem, das  $F$  nicht zerstückelt.

Trifft das System  $Q'_1 \dots Q'_n$   $x$ -mal das System  $Q_1 \dots Q_n$ , so wird  $F$ , wenn man zuerst  $Q_1 \dots Q_n$  und dann  $Q'_1 \dots Q'_n$  ausführt, in

$$1 + n + x$$

einfach zusammenhängende Teile zerlegt. — Führt man zuerst  $Q'_1 \dots Q'_n$  und hierauf  $Q_1 \dots Q_n$  aus, so zerfällt  $F$  in dieselben  $1 + n + x$  einfach zusammenhängende Teile. Nach Anlegung von  $Q'_1 \dots Q'_n$  zählt aber das System  $Q_1 \dots Q_n$  für  $n + x$  Querschnitte. Die Fläche  $F$  wird daher durch  $Q'_1 \dots Q'_n$  in eine Fläche  $F_1$  verwandelt, die durch  $n + x$  Querschnitte in  $1 + n + x$  einfach zusammenhängende Teile zerlegt wird;  $F_1$  ist also, nach Satz IV<sup>o</sup>) einfach zusammenhängend, w. z. b. w.

**Satz VI<sup>o</sup>)** Läßt sich eine Fläche  $F$  in eine einfach zusammenhängende verwandeln, so ist die Anzahl der Querschnitte, durch

welche dies erreicht werden kann, eine für diese Fläche unveränderliche, konstante Zahl.

Beweis: Angenommen,  $F$  werde einfach zusammenhängend gemacht

1°) durch  $Q_1 \dots Q_n$ ,

2°) „  $Q'_1 \dots Q'_n, Q'_{n+1}, \dots, Q'_{n+\nu}$  ( $\nu \geq 1$ ).

Nach dem vorigen Satze müssen dann schon  $Q'_1 \dots Q'_n$ , die  $F$  sicher nicht zerstückeln,  $F$  einfach zusammenhängend machen;  $F$  würde also einfach zusammenhängend

1°) durch  $Q'_1 \dots Q'_n$ ,

2°) „  $Q'_1 \dots Q'_n, Q'_{n+1} \dots Q'_{n+\nu}$ ,

d. h. in der durch  $Q'_1 \dots Q'_n$  einfach zusammenhängend gemachten Fläche wäre noch  $\nu$  ( $\geq 1$ ) Querschnitte möglich, die diese Fläche nicht zerstückeln. Dies steht in Widerspruch mit der Definition der einfach zusammenhängenden Flächen;  $\nu$  muß also  $= 0$  sein, w. z. b. w.

Die für eine gegebene Fläche  $F$  konstante Anzahl von Querschnitten, durch welche diese Fläche einfach zusammenhängend gemacht wird, spielt eine fundamentale Rolle in den Ausführungen der folgenden Paragraphen.

Wir wenden zunächst die vorhergehenden Sätze auf die Riemann'sche Fläche  $T$  an.

## § 15. Anwendung des Vorigen auf die Riemann'sche Fläche $T$ .

Wir weisen zunächst nach, daß  $T$  sich durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln läßt.

Zu dem Zwecke denken wir uns  $T$  entstanden durch Zusammenheftung der  $n$  Blätter  $E_1 \dots E_n$  längs Schnitten, die strahlenförmig von  $n$  in den  $n$  Blättern  $E_1 \dots E_n$  übereinander liegenden Punkten  $P_1 \dots P_n$  nach den Verzweigungspunkten von  $s$  laufen; ist hierbei ein Verzweigungspunkt  $\alpha_i$  von  $s$  kein Verzweigungspunkt für die Wurzel  $s_x$ , deren Wertvorrat im Blatte  $E_x$  ausgebreitet liegt, so geht in  $E_x$  kein Schnitt von  $P_x$  nach  $\alpha_i$ .

Die so entstandene Fläche  $T$  hat keine Randkurve; Querschnitte lassen sich daher in ihr vor der Hand nicht anlegen. Um das Anlegen von Querschnitten zu ermöglichen, punktieren wir die Fläche  $T$ , d. h. wir führen in ihr eine Anzahl von Punktschnitten aus, und zwar heben wir folgende Punkte heraus:

1<sup>o</sup>) die  $n$  Punkte  $P_1 \dots P_x \dots P_n$ ,

2<sup>o</sup>) sämtliche Verzweigungspunkte von  $T$ .

Hängen dabei in einem Verzweigungspunkte  $v$  Blätter von  $T$  zusammen, so denken wir uns diesen Verzweigungspunkt herausgehoben durch einen Schnitt, der diese  $n$  Blätter durchsetzt. Bezeichnet also  $v$  die Anzahl der Verzweigungspunkte, so besitzt  $T$ , nach Ausführung der erwähnten Punktschnitte,  $n + v$  geschlossene Randkurven.

In der nunmehr punktierten Fläche  $T$  heben wir jetzt die Heftungen der Blätter längs der Strahlen von  $P_1 \dots P_n$  nach den Verzweigungspunkten wieder auf, indem wir in jedem Blatte  $E_x$  von  $P_x$  aus Schnitte ziehen nach den Verzweigungspunkten, an denen dieses Blatt teilnimmt. Die Anzahl dieser Schnitte ist, wenn allgemein  $v$  die Ordnung eines Verzweigungspunktes bedeutet, gleich  $\Sigma v$ , die Summation über alle Verzweigungspunkte ausgedehnt gedacht. Durch diese  $\Sigma v$  Querschnitte wird jeder Zusammenhang zwischen den  $n$  Blättern von  $T$  aufgehoben,  $T$  zerfällt in  $n$  Stücke  $E'_1 \dots E'_x \dots E'_n$ , und diese Stücke sind einfach zusammenhängend. Es ist nämlich z. B.  $E'_x$  nichts anderes als das Blatt  $E_x$  mit einem Punktschnitt, der von  $P_x$  ausgeht und Zweige nach den Verzweigungspunkten ausschickt, in denen  $E_x$  mit andern Blättern zusammenhing. Von den  $\Sigma v$  Querschnitten lassen sich aber irgend welche  $n + v - 1$  auffassen als  $Q_{-1}$ , welche die Ränder der  $n + v$  ursprünglichen Punktschnitte zu einer geschlossenen Randkurve vereinigen. Die übrigen

$$\Sigma v - (n + v - 1)$$

zerlegen  $T$  in die erwähnten  $n$  einfach zusammenhängenden Stücke  $E'_1 \dots E'_n$ .

Es ist nun leicht, diese Stücke wieder so zusammenzuheften, daß eine einfach zusammenhängende Fläche entsteht. Ist z. B. längs des Schnittes  $Q_x$ , von  $P_x$  nach  $\alpha$ .

die Zuordnung der Wurzeln von  $F=0$  durch die Substitution:

$$S'_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & x & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & \lambda & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

gegeben, so hefte man längs  $Q_{x,i}: \overset{+}{E'_x}$  an  $\bar{E}'_i$ . Gemäß Satz III a<sup>o</sup>) des vorigen Paragraphen bilden dann  $E'_x$  und  $E'_i$  ein einziges einfach zusammenhängendes Flächenstück  $E'_{x,i}$ . An dieses Stück lassen sich durch  $n-2$  weitere, geeignete Heftungen sämtliche übrigen  $n-2$  einfach zusammenhängenden Stücke  $E'$  so anschließen, daß ein einfach zusammenhängendes Stück  $E'_{1,2,\dots,n}$  entsteht. Ist dies ausgeführt, so ist  $T$  in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt. Die Anzahl  $q$  der Querschnitte, die in dieser einfach zusammenhängenden Fläche liegen, d. h. die Anzahl der Querschnitte, durch welche  $T$  einfach zusammenhängend geworden ist, ist gleich der Zahl  $\Sigma \nu$  der ursprünglich angelegten Schnitte, vermindert um diejenigen  $n + \nu - 1$  Schnitte, die dazu gedient haben, die Ränder der  $n + \nu$  Punktschnitte zu einer geschlossenen Randkurve zu vereinigen, vermindert weiter um die  $n-1$  Schnitte, die beim Zusammenheften von  $E'_1 \dots E'_n$  wieder aufgehoben worden sind. Es ist daher

$$q = \Sigma \nu - (n + \nu - 1) - (n - 1) = \Sigma \nu - \nu - 2(n - 1),$$

oder, wenn wir berücksichtigen, daß  $\nu$  ebensoviel Einheiten enthält, als  $\Sigma \nu$  Summanden:

$$1^o) \quad q = \Sigma (\nu - 1) - 2(n - 1).$$

Nachdem so nachgewiesen ist, daß  $T$  in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann, leiten wir im Anschluß an Riemann (Ges. Werke, pag. 122—123) ein sehr übersichtliches Querschnittssystem ab, das zu demselben Ziele führt, und bei dessen Einführung die arithmetische Natur von  $q$  sich aufs deutlichste offenbart. Wir werden dieses System späterhin immer benutzen und nennen es das kanonische Querschnittssystem der Fläche  $T$ .

Die Fläche  $T$  besitzt als solche keine Begrenzung. Um in ihr Querschnitte anlegen zu können, erteilen wir ihr durch einen sonst beliebig gestalteten Punktschnitt  $P$  eine geschlossene Randkurve.

Ist dadurch  $T$  einfach zusammenhängend geworden, so ist  $q = 0$ , also eine gerade Zahl. — Ist  $T$  noch nicht einfach zusammenhängend, so läßt sich in ihr ein Rückkehrschnitt  $a_1$  anlegen, der  $T$  nicht zerstückelt; nach Anlegung von  $a_1$  hat dann  $T$  drei Randkurven, die zwei Ränder von  $a_1$  und den Rand des Punktschnittes  $P$ . Diese drei Randkurven lassen sich durch zwei geeignete  $Q_{-1}$  zu einer geschlossenen Randkurve vereinigen; als solche  $Q_{-1}$  wählen wir, einmal einen Querschnitt  $b_1$ , der zwei an den Rändern von  $a_1$  einander gegenüber liegenden Punkte verbindet, und dann einen Schnitt, der den Rand von  $P$  mit dem Kreuzungspunkte von  $a_1$  und  $b_1$  verbindet. Da die zwei Schnitte  $a_1$  und  $c_1$  zusammen einen  $Q_{+1}$  von  $P$  aus bilden, so können wir auch sagen: wir haben bis jetzt in  $T$  im ganzen zwei Querschnitte, einen  $Q_{+1}$  und einen  $Q_{-1}$ . Ist dadurch  $T$  einfach zusammenhängend geworden, so ist  $q = 2$ , also wieder eine gerade Zahl.

Ist  $T$  noch nicht einfach zusammenhängend, so lassen sich zwei weitere Schnitte  $Q_{+1}$  und  $Q_{-1}$  anlegen, genau wie vorhin. Ist dann  $T$  einfach zusammenhängend, so ist  $q = 4$ .

Ist  $T$  noch nicht einfach zusammenhängend, so setzt sich dieses Verfahren fort, jedoch nicht bis ins Unendliche, da  $q$  durch die Gleichung 1<sup>o</sup>) bestimmt ist. — Auf jeden Fall aber ergibt sich: die Anzahl  $q$  der Querschnitte, durch welche  $T$  in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann, ist eine gerade. Setzen wir daher  $q = 2p$ , so ist

$$2^o) \quad 2p = \Sigma(\nu - 1) - 2(n - 1).$$

Ist umgekehrt die Zahl  $p$  ermittelt auf Grund der Gleichung 2<sup>o</sup>), so liefern die vorigen Betrachtungen ein einfaches Querschnittssystem, um  $T$  einfach zusammenhängend zu machen.

In  $T$  legen wir  $p$  Rückkehrschnitte  $a_1, a_2, \dots, a_p$  an, die  $T$  nicht zerstückeln, und  $p$  Querschnitte  $b_1, b_2, \dots, b_p$  von der Art eines  $Q_{-1}$ , genau wie vorhin, zu jedem  $a$  einen; auch diese zerstückeln  $T$  nicht. Ziehen wir dann noch von irgend einem nichtsingulären Punkte  $P$  von  $T$  aus Schnitte  $c_1, \dots, c_p$  nach den Kreuzungsstellen der Querschnittpaare,  $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ ,

(siehe Fig. 24), so wird  $T$  durch die Gesamtheit dieser Schnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, die wir von hier ab stets mit  $T'$  bezeichnen.

Jeder der  $3p$  Schnitte  $a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_p$  besitzt 2 Ränder, die wir, wie die Figur anzeigt, als  $+$  Rand und  $-$  Rand unterscheiden, und die Gesamtheit dieser  $6p$  Ränder bildet eine geschlossene Randkurve, die Begrenzung der Fläche  $T'$ . Die in der Figur eingetragenen Pfeile zeigen an, wie diese geschlossene Randkurve bei einem positiven Umlauf um  $T'$  zu durchlaufen ist.

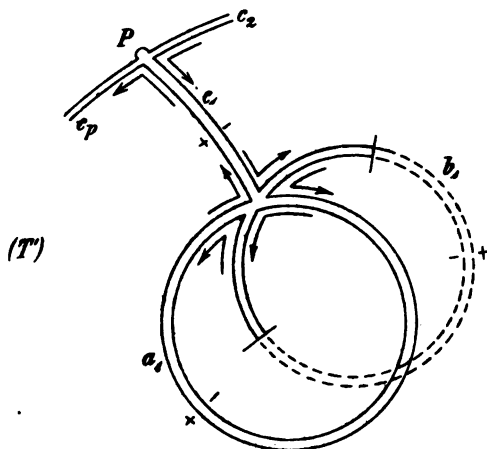


Fig. 24.

In speziellen Fällen, z. B. bei der Fläche der hyperelliptischen Funktionen, lassen sich die Schnitte  $c_1 \dots c_p$  auch in einfacherer Weise anlegen, als vorhin angegeben. Da diese Schnitte  $c$  übrigens bei den meisten späteren Untersuchungen fast gar keine Rolle spielen, so werden sie oft bei der Anlage eines kanonischen Querschnittssystems in der Figur nicht eingetragen.

An die Gleichung 2<sup>o</sup>) schließt sich noch eine Bemerkung an.

Sind alle Verzweigungspunkte von  $T$  einfache Verzweigungspunkte, so ist jedesmal  $\nu = 2$ , d. h.  $\nu - 1 = 1$ ;  $\Sigma(\nu - 1)$

ist dann gleich der Anzahl  $v$  aller Verzweigungspunkte, und es gilt die Beziehung:

$$3^{\circ}) \quad 2p = v - 2(n - 1),$$

aus der wieder, wie aus 4<sup>o</sup>) § 10, folgt, daß  $v$  eine gerade Zahl ist. Denkt man sich übrigens, wenn Verzweigungspunkte höherer Ordnung  $\nu$  vorkommen, jeden solchen Verzweigungspunkt gemäß Satz III<sup>o</sup>) § 11, in  $\nu - 1$  mit ihm äquivalente einfache Verzweigungspunkte aufgelöst, so können wir auch sagen: die Beziehung 3<sup>o</sup>) gilt allgemein, wofern die Verzweigungspunkte (nach Satz III<sup>o</sup>) § 11) richtig gezählt werden.

Die in den Beziehungen 2<sup>o</sup>) und 3<sup>o</sup>) auftretende, für eine gegebene Riemann'sche Fläche  $T$  konstante Zahl  $p$  heißt das Geschlecht der Fläche  $T$  oder der Gleichung  $F(s, z) = 0$ , zu der  $T$  gehört. Sie wird in allen weiteren Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielen.

In den folgenden Entwicklungen dieses Werkes beschränken wir uns durchweg auf den Fall von nur einfachen Verzweigungspunkten. Unter dieser Annahme\*) gilt neben der obigen Beziehung 3<sup>o</sup>) auch die Gleichung 4<sup>o</sup>), § 10

$$4^{\circ}) \quad v = 2m(n - 1) - 2r.$$

Eliminiert man  $v$  zwischen 3<sup>o</sup>) und 4<sup>o</sup>), so erhält man die weitere Beziehung:

$$5^{\circ}) \quad p = (m - 1)(n - 1) - r,$$

von der wir wiederholt werden Gebrauch zu machen haben. Die in 4<sup>o</sup>) und 5<sup>o</sup>) vorkommende GröÙe  $r$  bezeichnet die Anzahl der Doppelpunkte von  $s$ , ohne Verzweigung.

## § 16. Beispiele zum Vorhergehenden.

Beispiel 1<sup>o</sup>) Es sei

$$s^2 = A \cdot (z - a)(z - b).$$

Die zugehörige Fläche  $T$  ist zweiblättrig ( $n = 2$ ) und hat zwei einfache Verzweigungspunkte in  $z = a$  und  $z = b$ . Es ist daher

$$2p = 2 - 2(2 - 1) = 0, \text{ d. h. } p = 0.$$

---

\*) Über die Berechtigung dieser Annahme siehe Kap. V, Transformationstheorie.



Die Fläche ist also bereits nach Anlegung des Verzweigungsschnittes von  $a$  nach  $b$  einfach zusammenhängend. Jeder geschlossene Weg in  $T$  ist die vollständige Begrenzung eines Flächenstückes. Da keine Querschnitte anzulegen sind, können wir auch von einem Punktschnitte absehen.

Beispiel 2<sup>o</sup>) Es sei

$$s^3 - (z^3 - a^3) = 0. \quad (\text{Beispiel II}^o) \S 4).$$

Die zugehörige Fläche  $T$  ist zweiblättrig ( $n=2$ ) und hat vier einfache Verzweigungspunkte in  $A(z=a)$ ,  $B(z=a\alpha)$ ,  $C(r=a.\alpha^2)$  und  $z=\infty$  ( $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ). Es ist daher

$$2p = 4 - 2(2 - 1) = 2, \text{ d. h. } p = 1.$$

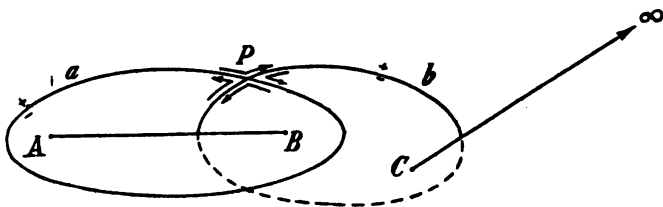


Fig. 25 a.

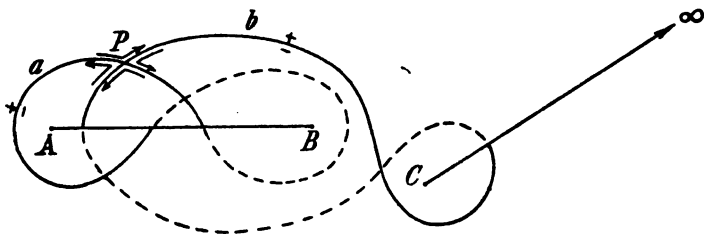


Fig. 25 b.

Die Fläche  $T$  wird einfach zusammenhängend durch ein Querschnittspaar  $(a, b)$ , das  $T$  nicht zerstückelt. Die Figuren 25 a und 25 b geben zwei verschiedene Anordnungen dieses Querschnittspaares; die Schnitte in  $E_1$  sind

dabei durch ausgezogene, die in  $E_2$  durch gestrichelte Linien markiert.\*)

Beispiel 3<sup>o</sup>) Es sei

$$s^2 = \lambda(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)(z - \delta).$$

Hierin ist  $n = 2$ ,  $v = 4$ , und daher

$$2p = 4 - 2(2 - 1) = 2, \text{ d. h. } p = 1.$$

Das Querschnittpaar  $(a, b)$ , das die Fläche  $T$  einfach zusammenhängend macht, läßt sich verschiedenartig anlegen, wie die Figuren 26 a, 26 b und 26 c zeigen, in denen die

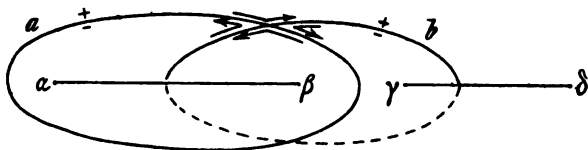


Fig. 26 a.

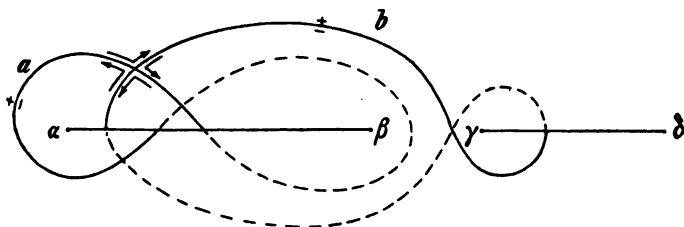


Fig. 26 b.

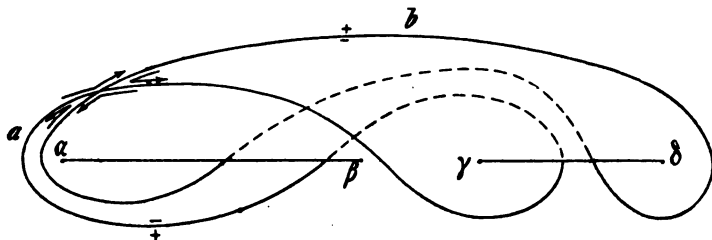


Fig. 26 c.

\*) Von hier ab sind die zwei Ränder der Querschnitte nicht mehr getrennt gezeichnet, sondern durch das +, resp. — Zeichen an dem betreffenden Querschnitte kenntlich gemacht.

Schnitte in  $E_1$  wieder durch ausgezogene, die in  $E_2$  durch gestrichelte Linien markiert sind.

Beispiel 4<sup>o</sup>) Es sei

$$s^2 = (z - \alpha)(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_{2q+1}).$$

Hier ist  $n = 2$ ,  $v = 2q + 2$ , und daher

$$2p = 2q + 2 - 2(2 - 1) = 2q, \text{ d. h. } p = q.$$

Die Figuren 27 a und 27 b zeigen zwei verschiedene Anordnungen der  $p = q$  Querschnittspaare  $(a, b)$ , wobei zugleich die  $p$  Schnitte  $c_1 \dots c_p$  durch  $p - 1$  wieder mit  $c_1 \dots c_{p-1}$  bezeichnete Schnitte so ersetzt sind, daß allgemein  $c_x$  den Kreuzungspunkt des Paares  $(a_x, b_x)$  mit dem des Paares  $(a_{x+1}, b_{x+1})$  verbindet.

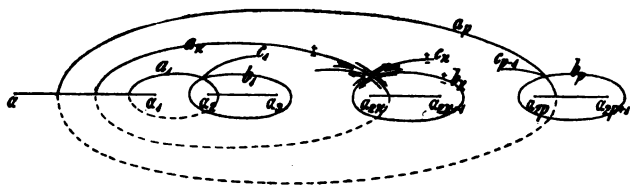


Fig. 27 a.

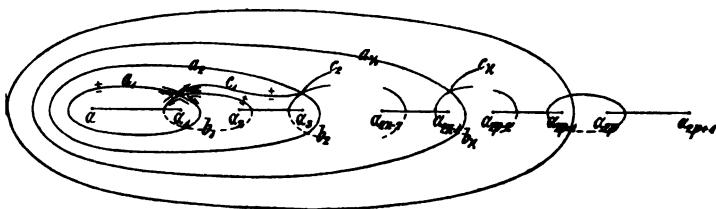


Fig. 27 b.

Beispiel 5<sup>o</sup>) Es sei

$$s^3 + z^3 - 1 = 0.$$

(Beispiel V<sup>o</sup>) § 4 und Beispiel 2<sup>o</sup>) § 11).

Die zugehörige Fläche  $T$  ist dreiblättrig ( $n = 3$ ) und besitzt Verzweigungspunkte von der Ordnung  $\nu = 3$  an den Stellen

$z = 1, \alpha, \alpha^2$  ( $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ). Jeder dieser Verzweigungspunkte ist nach Satz III<sup>o</sup>) § 11 äquivalent mit zwei einfachen Verzweigungspunkten; es ist daher

$$2p = 6 - 2(3 - 1) = 2, \text{ d. h. } p = 1.$$

Die Fläche  $T$  wird also einfach zusammenhängend durch ein Querschnittspaar  $(a, b)$ , das  $T$  nicht zerstückelt. Figur 28, in der die Verzweigungspunkte, der Einfachheit halber, als in gerader Linie liegend gezeichnet sind, stellt ein solches Querschnittspaar dar. Die in  $E_1$  verlaufenden Schnitte sind dabei durch ausgezogene, die in  $E_2$  durch punktierte, die in  $E_3$  durch gestrichelte Linien markiert.

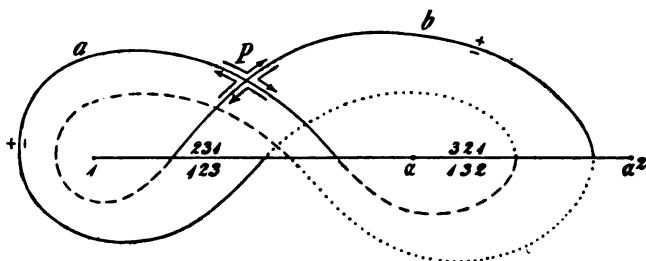


Fig. 28.

Beispiel 6<sup>o</sup>) Es sei

$$s^3 = \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2)}. \quad (\text{Beispiel 3<sup>o</sup>) § 11}).$$

Die zugehörige Fläche  $T$  hat vier Verzweigungspunkte von der Ordnung  $\nu = 3$  in den Punkten  $z = \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ; da dieselben  $4(3 - 1) = 8$  einfachen Verzweigungspunkten äquivalent sind, so ist

$$2p = 8 - 2(3 - 1) = 4, \text{ d. h. } p = 2.$$

Die Fläche  $T$  wird also einfach zusammenhängend durch zwei Querschnittspaare  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ , die  $T$  nicht zerstückeln, in Verbindung mit zwei Schnitten  $c_1, c_2$ . Figur 29, in der die Verzweigungspunkte als in gerader Linie liegend

angenommen und in der Reihenfolge  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  durch dem Verzweigungsschnitt  $\Sigma$  verbunden sind, zeigt eine Anordnung des Querschnittspaares  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ . Die zwei Schnitte  $c_1, c_2$  sind dabei ersetzt durch einen Schnitt  $c$ , der den

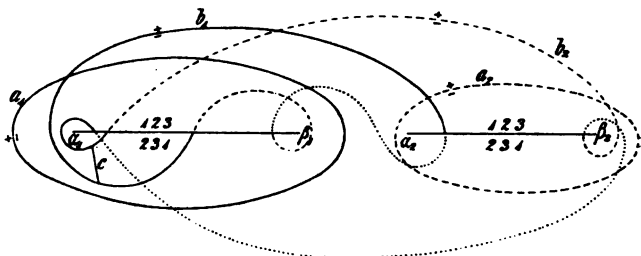


Fig. 29.

— Rand von  $b_1$  mit dem + Rand von  $b_2$  verbindet; die Schnitte in  $E_1$  sind durch ausgezogene, die in  $E_2$  durch punktierte, die in  $E_3$  durch gestrichelte Linien markiert.

### § 17. Normalform von $T$ .

Herr Lüroth (Math. Annalen, Bd. IV) und Clebsch (Math. Annalen, Bd. VI) haben gezeigt, wie man der Verzweigungsfläche  $T$ , wenn nur einfache Verzweigungspunkte vorhanden sind, eine sehr übersichtliche Normalform erteilen kann. Wir geben in diesem Paragraphen in kurzen Zügen eine Darstellung der Resultate dieser zwei Autoren.\*)

Es seien  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_v$  die in einer bestimmten, sonst beliebigen Reihenfolge numerierten Verzweigungspunkte der durch die Grundgleichung  $F=0$  definierten algebraischen Funktion  $s$  von  $z$ ,  $P$  ein nicht singulärer Punkt der  $z$ -Ebene,  $l_1, l_2 \dots l_v$  Schnitte, welche von  $P$  nach den Verzweigungspunkten laufen. Die Reihenfolge der Verzweigungspunkte denken wir uns der Übersichtlichkeit wegen so gewählt, daß

\*) Die Darstellung schließt sich an an Picard, *Traité d'analyse*. Bd. II. pag. 367—74. — Eine ausführliche, an Clebsch sich anschließende Darstellung findet man bei Herrn Stahl: *Theorie d. Abel'schen Funktionen*. pag. 31—38.

der von  $P$  nach  $\alpha_1$  gehende Strahl  $l_1$  bei einer Umdrehung um  $P$  im Sinne der Drehung der Uhrzeiger successive die Punkte  $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_v$  trifft. Den Schnitten  $l_1 \dots l_v$  haben wir früher (§ 11) Substitutionen  $S'_1, S'_2 \dots S'_v$  so zugeordnet, daß allgemein  $S'_i$  angiebt, wie ein  $+$  Umlauf um den Verzweigungspunkt  $\alpha_i$  die Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  von  $F=0$  permutiert. Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen bewirkt jede solche Substitution  $S'$  eine Permutation von nur zwei Wurzeln. Wir denken uns nun die Schnitte  $l$  ersetzt durch geschlossene Wege, die von  $P$  ausgehend nach den Verzweigungspunkten  $\alpha$  hin laufen, je einen Verzweigungspunkt in unmittelbarer Nähe umlaufen und dann wieder zu  $P$  zurückkehren. Jeden solchen Weg nennen wir eine Schleife. Bezeichnen wir die  $v$  Schleifen wieder mit  $l_1 \dots l_v$ , so permutiert jede Schleife nur zwei Wurzeln von  $F=0$ , und zwar wird allgemein die durch  $l_i$  hervorgebrachte Permutation diejenige sein, die durch die Substitution  $S'_i$  angegeben wird. In den Figuren sind die Schleifen durch einfache Linien markiert; die diesen Linien beigegebenen Indicespaare  $\alpha\beta, \dots$  geben die Wurzelpaare  $s_\alpha s_\beta, \dots$  an, die durch die jedesmalige Schleife permutiert werden.

Angenommen, die erste Schleife  $l_1$  permutiere die zwei Wurzeln  $s_\alpha, s_\beta$ . Dann wird, wenn wir mit dem Anfangswerte  $s_\alpha$  von  $P$  ausgehen und die Gesamtheit aller Schleifen durchlaufen, ein solcher Weg, nach der früher (§ 11) bewiesenen Beziehung:

$$S'_1 S'_2 \dots S'_v = 1,$$

ganz sicher  $s_\alpha$  wieder zu seinem Anfangswerte zurückführen. Möglicherweise tritt dieses aber auch schon ein, bevor wir alle  $v$  Schleifen durchlaufen haben. Angenommen, wir kehren beim successiven Durchlaufen aller Schleifen zum erstenmale nach Durchlaufen der Schleife  $l_1$  wieder zum Ausgangswerte  $s_\alpha$  zurück. Wir ändern dann (Fig. 30) die Reihenfolge der Schleifen und ziehen die Schleife  $l_1$  an die zweite Stelle, indem wir von  $P$  aus in dem Winkelraume zwischen  $l_1$  und  $l_2$  eine in der Figur durch eine punktierte Linie angedeutete Schleife  $\lambda_2$  anlegen, die um  $\alpha_2$  führt und in ihrem Verlauf die zwischen  $l_1$  und  $l_2$  befindlichen Schleifen schneidet, welche ebenfalls  $s_\alpha$  mit einer andern Wurzel permutieren. Die neue Schleife  $\lambda_2$  permutiert gleichfalls zwei Wurzeln von  $F=0$ .

Beachtet man, daß ein Durchlaufen von  $\lambda_1$ , wie sich aus der Figur ergibt, ersetzt werden kann durch ein successives Durchlaufen der Schleifen  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$ , so sieht man, daß die Schleife  $\lambda_1$ , welche an die Stelle von  $\lambda_7$  getreten ist, dieselben Wurzeln  $s_\alpha, s_\beta$  permutiert wie  $\lambda_1$ .

In analoger Weise lassen sich die zwei Schleifen  $\lambda_2$  und  $\lambda_6$ , die  $s_\alpha$  mit einer andern Wurzel permutieren, durch

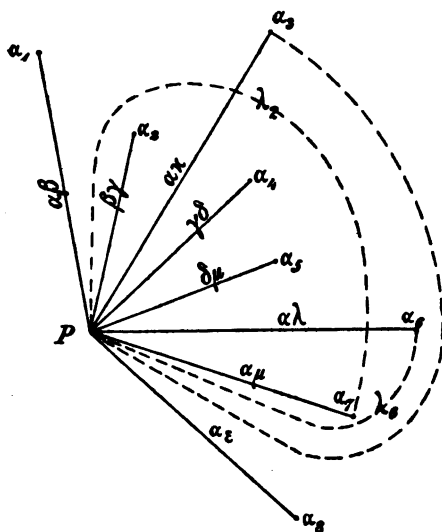


Fig. 30.

zwei neue Schleifen  $\lambda_3$  und  $\lambda_6$  ersetzen, wie die punktierten Linien in der Figur es angeben. Diese Schleifen permutieren nicht mehr die Wurzel  $s_\alpha$ .  $\lambda_6$  z. B. ist äquivalent mit einem Wege, der sich zusammensetzt aus den der Reihe nach durchlaufenen Schleifen  $\lambda_7, \lambda_6, \lambda_7$ ; da aber, nach Voraussetzung,  $\lambda_7$  die erste Schleife ist, nach deren Durchlaufen  $s_\alpha$  wieder zu seinem Anfangswerte zurückkehrt, so ist

$\lambda \neq \mu$ . Die Schleife  $\lambda_6$  bringt also dieselbe Permutation der Wurzeln hervor, wie die zweimal durchlaufene Schleife  $\lambda_7$ , permutiert also nicht mehr die Wurzel  $s_\alpha$ .

Die Reihenfolge der ursprünglichen Schleifen ist nun insofern umgeordnet, als dieselbe jetzt mit zwei Schleifen anfängt, welche beide die zwei Wurzeln  $s_\alpha, s_\beta$  permutieren; an der Reihenfolge der übrigen Schleifen ist nichts geändert, mit der Ausnahme, daß einige Schleifen ersetzt worden sind durch andere, welche die Wurzel  $s_\alpha$  nicht mehr permutieren.

Geben wir jetzt, statt wie vorhin von  $\lambda_1$ , von  $\lambda_2$  aus, und wiederholen wir die vorigen Operationen, so erhalten wir eine Reihenfolge von Schleifen, von denen die drei ersten

die zwei Wurzeln  $s_\alpha, s_\beta$  permutieren, während zugleich andere Schleifen eingeführt worden sind, die  $s_\alpha$  nicht mehr permutieren. Setzen wir dies Verfahren fort, so erhalten wir augenscheinlich schliesslich eine Reihenfolge der  $v$  Schleifen, bei der alle Schleifen, welche  $s_\alpha$  und  $s_\beta$  permutieren, sich an erster Stelle finden und aufeinanderfolgen, während alle übrigen Schleifen  $s_\alpha$  nicht mehr permutieren. Da ferner jede gerade Anzahl von Schleifen, die  $s_\alpha$  und  $s_\beta$  permutieren,  $s_\alpha$  wieder zu seinem Anfangswerte zurückführt, während jede ungerade Anzahl derselben  $s_\alpha$  zum Endwerte  $s_\beta$  führt, und ausserdem ein Umlauf um sämtliche Schleifen  $s_\alpha$  sicher zu seinem Anfangswerte zurückführt, so muss die Anzahl der zu Anfang stehenden Schleifen, welche die zwei Wurzeln  $s_\alpha$  und  $s_\beta$  permutieren, eine gerade sein.

Wir lassen nun die Schleifen, welche  $s_\alpha$  und  $s_\beta$  permutieren, beiseite und wenden uns den auf sie folgenden Schleifen zu. Angenommen, die erste derselben permutiere  $s_\beta$  mit einer andern Wurzel  $s_\gamma$ . Wiederholt man dann für die Schleifen, welche  $s_\beta$  mit einer andern Wurzel permutieren, dieselben Operationen, die vorhin an den Schleifen vorgenommen worden sind, die  $s_\alpha$  mit  $s_\beta$  permutieren, so erhält man eine zweite Gruppe von Schleifen, welche nur mehr die Wurzeln  $s_\beta$  und  $s_\gamma$  permutieren, während alle folgenden Schleifen weder  $s_\alpha$  noch  $s_\beta$  permutieren.

So setzt sich das fort. Wir erhalten das Resultat: durch geeignete Umordnung lassen sich alle Schleifen in von einander getrennte Gruppen von je einer geraden Anzahl von Schleifen einteilen; die Schleifen der ersten Gruppe permutieren nur die zwei Wurzeln  $s_\alpha, s_\beta$ , die der zweiten nur die Wurzeln  $s_\beta, s_\gamma, \dots$  die der letzten die zwei Wurzeln  $s_x, s_2$ , wo  $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma, \dots, s_x, s_2$  alle Wurzeln von  $F = 0$  bezeichnen.

Durch weitere Änderung der Reihenfolge der von  $P$  nach den Verzweigungspunkten laufenden Schleifen lässt sich noch eine grössere Einfachheit und Übersichtlichkeit erzielen.

Angenommen, die erste Gruppe  $G_1$  von Schleifen, diejenige, deren einzelne Schleifen die Wurzeln  $s_\alpha, s_\beta$  permutieren, bestehe aus sechs Elementen. Wir ziehen dann die zwei letzten Schleifen dieser ersten Gruppe hinter die erste Schleife der zweiten Gruppe  $G_2$  (Fig. 31), was wir durch punktierte Linien andeuten. Die neuen Schleifen permutieren, wie un-



mittelbar ersichtlich, die Wurzeln  $s_\alpha$  und  $s_\gamma$ . Zieht man schließlich diese zwei Schleifen, wie die punktierten Linien in Fig. 32 es andeuten, wieder vor alle Schleifen der ersten Gruppe, so erhält man zwei Schleifen, welche  $s_\beta$  und  $s_\gamma$  permutieren. Dieselben Operationen lassen sich mit der dritten und vierten Schleife der ersten Gruppe ausführen. Ist dies geschehen, so sind die  $v$  Schleifen so angeordnet, daß zuerst vier Schleifen kommen, von denen jede  $s_\beta$ ,  $s_\gamma$  permutiert, hierauf zwei Schleifen, welche  $s_\alpha$ ,  $s_\beta$  permutieren, dann die Gruppe  $G_2$  von Schleifen, welche  $s_\beta$ ,  $s_\gamma$  permutiert

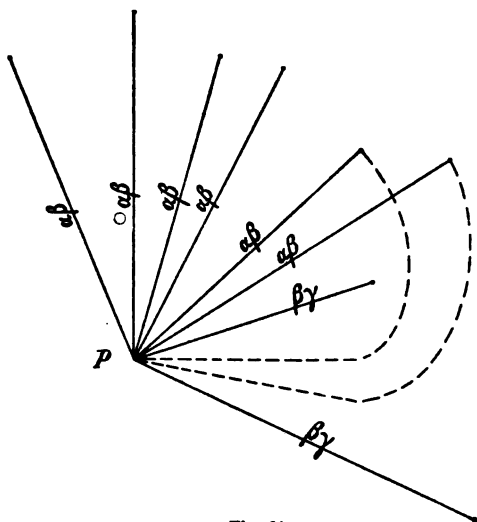


Fig. 31.

und schließlich die übrigen Gruppen. Operiert man mit allen Schleifengruppen, wie mit  $G_1$ , so sieht man unmittelbar ein, daß man durch geeignete Änderung der Reihenfolge die Schleifen  $l_1 \dots l_v$  so in Gruppen anordnen kann, daß alle Gruppen mit Ausnahme der letzten aus zwei Schleifen bestehen und alle Schleifen einer Gruppe dieselben zwei Wurzeln permutieren, daß ferner keine zwei Gruppen dieselben zwei Wurzeln permutieren, und jede Wurzel an den Permutationen zweier Gruppen teilnimmt. — Die Anzahl der Schleifen der letzten Gruppe sei gleich  $2(k+1)$ .

Angenommen, die ursprünglichen Schleifen seien in der soeben festgelegten Reihenfolge angeordnet. Wir bezeichnen dann wieder mit  $\alpha_1 \dots \alpha_v$  die entsprechende Reihenfolge der Verzweigungspunkte und numerieren die  $n$  Wurzeln von  $F=0$  so, daß  $l_1$  und  $l_2$  die Wurzeln  $s_1, s_2, l_3$  und  $l_4$  die Wurzeln  $s_3, s_4, \dots$  und schließlich die  $2(k+1)$  letzten Schleifen die Wurzeln  $s_{n-1}, s_n$  permutieren. Verbindet nun die in der  $z$ -Ebene angelegte Sperrlinie  $\Sigma$  (§ 11) die Verzweigungspunkte in dieser Reihenfolge  $\alpha_1 \dots \alpha_v$ , und bezeichnet man

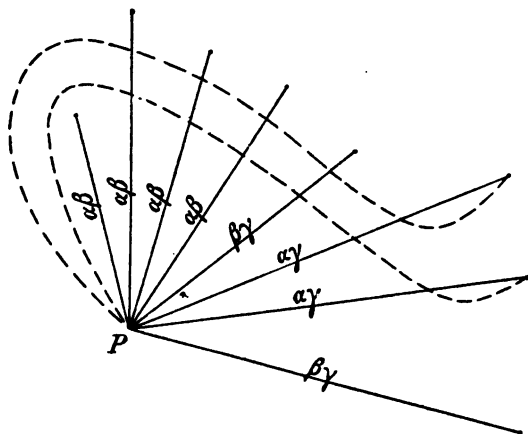


Fig. 32.

den von  $\alpha_i$  nach  $\alpha_{i+1}$  reichenden Abschnitt von  $\Sigma$  mit  $\Sigma_i$ , so ist die Zuordnung der Wurzeln längs  $\Sigma_2, \Sigma_4, \Sigma_6, \dots$  gegeben durch die identische Substitution, längs

$$\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_5, \Sigma_7, \dots$$

durch die Substitutionen:

$$S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{45}, \dots,$$

wo allgemein

$$S_{\varrho, \sigma} = \begin{pmatrix} 1, 2 \dots \varrho, \sigma \dots n \\ 1, 2 \dots \sigma, \varrho \dots n \end{pmatrix}$$

ist. Dies gilt jedoch nicht durchweg. Ist  $l_{2v+1}$  der erste Schnitt, der  $s_{n-1}$  mit  $s_n$  permutiert, so ist die Zuordnung

der Wurzeln an allen  $k+1$  Abteilungen  $\Sigma_{2v+1}, \Sigma_{2v+3}, \dots$  durch die Substitution  $S_{n-1, n}$  gegeben.

Hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der zusammenhängenden Fläche  $T$ . Trägt man die Werte der  $n$  Wurzeln  $s_1 \dots s_n$  tabellarisch in  $n$  Ebenen  $E_1 \dots E_n$  ein, und legt man diese so aufeinander, daß die Punkte mit gleichem  $z$  übereinander liegen, so wird  $s$  eindeutige Funktion des Ortes in der Fläche, die man erhält, wenn man  $E_1$  mit  $E_2$  längs eines Verzweigungsschnittes von  $\alpha_1$  bis  $\alpha_2$ ,  $E_2$  mit  $E_3$  längs eines Verzweigungsschnittes von  $\alpha_3$  bis  $\alpha_4, \dots E_{n-1}$  mit  $E_n$  längs  $k+1$  Verzweigungsschnitten zwischen  $\alpha_{2v+1}$  und  $\alpha_{2v+2}$ ,  $\alpha_{2v+3}$  und  $\alpha_{2v+4}, \dots \alpha_{v-1}$  und  $\alpha_v$  zusammenheftet. Die Blätter der so entstandenen Fläche  $T$  hängen kettenförmig in der Weise zusammen, daß jedes Blatt mit dem folgenden nur längs eines Verzweigungsschnittes zusammengeheftet ist; nur zwischen den zwei letzten Blättern wird der Zusammenhang längs  $k+1$  Verzweigungsschnitten hergestellt.

Die Anzahl sämtlicher so erhaltenen Verzweigungsschnitte ist

$$n - 2 + k + 1.$$

Die Zahl ist aber, da jeder Verzweigungsschnitt zwei Verzweigungspunkte verbindet, und keine zwei Verzweigungsschnitte durch denselben Verzweigungspunkt gehen, gleich der halben Anzahl aller Verzweigungspunkte, d. h.:

$$2(n + k - 1) = v.$$

Andererseits ist aber auch (siehe § 15, 3°), wenn  $p$  das Geschlecht von  $T$  bedeutet:

$$2(n + p - 1) = v.$$

Aus beiden Relationen folgt:

$$k = p.$$

Wir haben so das Schlussergebnis:

Ist die Grundgleichung  $F=0$ , die eine algebraische Funktion  $s$  von  $z$  mit nur einfachen Verzweigungspunkten  $\alpha_1 \dots \alpha_v$  definiert, vom Geschlechte  $p$ , so läßt sich die Reihenfolge, in

welcher die Sperrlinie  $\Sigma$  die Verzweigungspunkte verbindet, stets so wählen, daß die Blätter der zugehörigen Fläche  $T$  kettenförmig in der Weise zusammenhängen, daß jedes der  $n-1$  ersten Blätter mit dem nächstfolgenden längs eines, das  $(n-1)^{\text{te}}$  mit dem  $n^{\text{ten}}$  aber längs  $p+1$  Verzweigungsschnitten zusammenhängt.

Diese für den Fall nur einfacher Verzweigungspunkte erreichbare Form von  $T$  nennen wir die Normalform der Riemann'schen Verzweigungsfläche.

Es bleibt nun noch zu zeigen, wie sich diese Normalform von  $T$  in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln läßt. Die Lösung dieser Aufgabe ist eine außerordentlich einfache. Sind  $\beta, \beta_1 \dots \beta_{2p+1}$  die Verzweigungspunkte, welche  $E_{n-1}$  mit  $E_n$  verbinden, so legen wir in  $E_{n-1}$  und  $E_n$  ein System von  $p$  Querschnittsbündeln  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2 \dots p$ ) an, die ganz in diesen zwei Blättern verlaufen und nach dem Schema der Querschnitte für den Fall der hyperelliptischen Funktionen (§ 16, Beispiel 4<sup>o</sup>) angeordnet sind. Diese Querschnitte zerstückeln  $T$  nicht, machen es also einfach zusammenhängend nach Satz V.<sup>o</sup>) § 14.

---

Über eine durch kontinuierliche Deformation der  $n$ -blättrigen Kugelfläche  $T$  erreichbare, besonders anschauliche Gestalt von  $T$  in Form einer zusammenhängenden, mit  $p$  Löchern versehenen Fläche im Raum, siehe: Clifford, On the canonical form and dissection of a Riemann's surface (Proceedings of the London mathematical Society, Bd. VIII No. 122); Hofmann: Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen (Halle, 1888); Schottky, Crelle Bd. 83). — Über die stetige Deformation von Flächen siehe ferner: Jordan, Journal de Lionville, 2. série, t. XI) und einige Abhandlungen von Herrn Klein in den Mathem. Annalen.

In diesem Kapitel haben wir die Riemann'sche Fläche  $T$  konstruiert, indem wir von einer zu Grunde gelegten Gleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  ausgingen. Riemann selbst, und nach ihm andere Autoren, haben die Umkehrung dieser Fragestellung

behandelt. Sie sind von einer als fertig vorliegenden Fläche  $T$  ausgegangen und haben die Existenz von Funktionen auf einer solchen a priori angenommenen Fläche nachzuweisen und die Eigenschaften derselben zu studieren gesucht. Für das Studium dieser Umkehrung, die man auch als das Dirichlet'sche Problem für die Fläche  $T$  bezeichnet, sei auf die folgende Litteratur verwiesen:

Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie d. Abel'schen Integrale.

Schwarz: Ges. Werke. Bd. II.

Poincaré: American Journal of Mathematics, t. IX.

Jules Riemann: Sur le problème de Dirichlet (Annales de l'Ecole Normale, 1888).

Außerdem sei noch verwiesen auf mehrere in den Mathem. Annalen erschienenen Abhandlungen der H. H. Klein, Hurwitz, Dyck, ..., und insbesondere auf die Abhandlung von Herrn Klein: Neue Beiträge zur Riemann'schen Funktionentheorie, Math. Annalen; Bd. 21, von Herrn Hilbert, Jahresbericht der deutschen Mathem. Vereinigung 1899.

---

## Kapitel III.

# Die Integrale der Klasse.

---

### § 18. Das allgemeine Abel'sche Integral.

Bedeutet  $\tau$  irgend eine algebraische Funktion der Klasse, so heißt jedes Integral von der Form:

$$1^{\circ}) \quad J = \int_{(s_0, z_0)}^{(s, z)} \tau dz$$

ein Abel'sches Integral oder auch ein Integral der Klasse. Der zugehörige Integrationsweg ist ein beliebiger Weg in  $T$ , der vom Anfangspunkte  $(s_0, z_0)$  nach dem Endpunkte  $(s, z)$  führt und durch keinen Verzweigungspunkt von  $T$  hindurchgehen soll.

Der Integrand  $\tau$  von  $J$  ist in  $T$  eindeutige Funktion des Ortes und besitzt in dieser Fläche algebraische Unstetigkeiten (Pole), wenn er nicht etwa, was wir ausschließen, in  $T$  überall denselben konstanten Wert hat. Wie steht es mit der Stetigkeit und Eindeutigkeit von  $J$  in  $T$ ?

Von dem Integrale  $J$  wissen wir bereits, daß es in  $T$  ebenfalls Unstetigkeiten besitzen kann und zwar, außer den bei den Funktionen der Klasse auftretenden algebraischen Unstetigkeiten, unter Umständen auch noch logarithmische Unstetigkeiten.

Soll  $J$ , ebenso wie  $\tau$ , in  $T$  eindeutige Funktion des Ortes sein, so müssen nach der Lehre von den Integralen einwertiger Funktionen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

1°) Irgend zwei Integrationswege vom Anfangspunkte  $a(s_0, z_0)$  nach dem Endpunkte  $b(s, z)$  müssen ein Stück von  $T$  vollständig abgrenzen; d. h. jeder Ringweg in  $T$  muß die vollständige Begrenzung eines Stückes von  $T$  sein.

2°) Kein solcher Ringweg darf einen logarithmischen Unstetigkeitspunkt von  $J$  umlaufen.

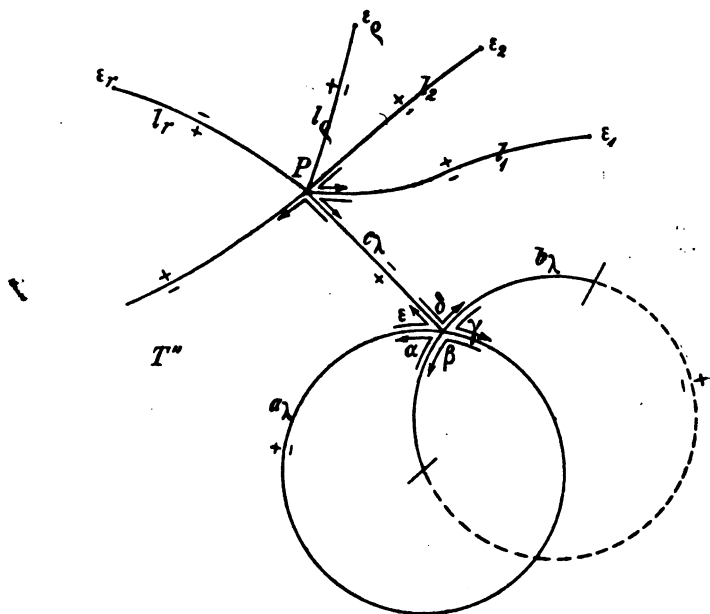


Fig. 33.

Um die erste Bedingung zu erfüllen, genügt es,  $T$  durch ein kanonisches Querschnittssystem in die einfach zusammenhängende Fläche  $T'$  zu verwandeln. Um auch die zweite Bedingung zu erfüllen, ziehen wir von einem beliebigen, nicht singulären Punkte von  $T'$  aus Schnitte  $l_1 \dots l_r$  nach den Punkten  $\epsilon_1 \dots \epsilon_r$ , in denen  $J$  logarithmisch unstetig wird. Im Folgenden nehmen wir stets an, der gemeinsame Ausgangspunkt aller Schnitte  $l_1 \dots l_r$  falle zusammen mit dem Punkte  $P$ , von dem die Schnitte  $c_1 \dots c_p$  des zu Grunde gelegten kanonischen Querschnittsystems aus-

gehen (Fig. 33). Beschränkt man die Integrationswege von  $J$  auf das Innere der so entstehenden einfach zusammenhängenden Fläche  $T''$ , so ist  $J$  eindeutige Funktion der Koordinaten seines obern Grenzpunktes  $(s, z)$ .

Für das Integral  $J$  gelten mehrere wichtige Lehrsätze:

**Satz 1<sup>o</sup>)** Das Integral  $\int \tau dz$ , in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von  $T'$  erstreckt, hat den Wert Null.

Beweis: Nach einem Satze von Cauchy ist

$$\int_{(T')} \tau dz = 2\pi i \cdot \text{mal der Summe der Residuen von } \tau \text{ innerhalb } T'.$$

Diese Summe ist aber (Satz IV<sup>o</sup>) § 12) gleich Null, und daher auch

$$2^o) \quad \int_{(T')} \tau dz = 0.$$

Durch Beschränkung des Integrationsweges auf das Innere von  $T''$  ist  $J$  zwar eindeutige Funktion des Ortes in dieser Fläche geworden, hat damit aber zugleich seine Stetigkeit verloren, indem es jetzt in zwei Punkten, die an einem der Schnitte  $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2 \dots p$ ),  $l_\varrho$  ( $\varrho = 1, \dots r$ ) einander gegenüber liegen, Werte annimmt, die im allgemeinen von einander verschieden sind. Unterscheidet man nämlich die zwei Ränder eines jeden der  $3p + r$  Schnitte  $a, b, c, l$  als  $+$  Rand und  $-$  Rand, wie Fig. 33 es angiebt, und bezeichnen  $\overset{+}{\sigma}$  und  $\overset{-}{\sigma}$  zwei Punkte, die an dem  $+$  und  $-$  Rand eines dieser Schnitte einander gegenüber liegen, so ist

$$\int_{\sigma_0}^{\overset{+}{\sigma}} \tau dz = \int_{\sigma_0}^{\overset{-}{\sigma}} \tau dz + \int_{\overset{-}{\sigma}}^{\overset{+}{\sigma}} \tau dz = \bar{J} + \int_{\overset{-}{\sigma}}^{\overset{+}{\sigma}} \tau dz,$$

wo der Integrationsweg des letzten Integrals ohne Überschreitung der Begrenzung von  $T''$  von  $\overset{-}{\sigma}$  nach  $\overset{+}{\sigma}$  führen muß. Das letzte Integral ist aber im allgemeinen von Null verschieden.



Setzen wir

$$\Delta J_\sigma = \int_{\bar{\sigma}}^{+\sigma} \tau dz,$$

so gilt der

**Satz II<sup>o</sup>)**  $\Delta J$  hat längs jedes einzelnen Schnittes  $a, b, c, l$  einen konstanten Wert.

Beweis: Liegen  $^{+}\sigma, \bar{\sigma}$  einander gegenüber auf den Rändern des Schnittes  $S$ , und bezeichnen  $^{+}\zeta, \bar{\zeta}$  zwei beliebige andere, an den Rändern desselben Schnittes  $S$  einander gegenüberliegende Punkte, so ist

$$\begin{aligned} \Delta J_\sigma - \Delta J_\zeta &= \int_{\bar{\sigma}}^{+\sigma} \tau dz - \int_{\bar{\zeta}}^{+\zeta} \tau dz \\ &= \int_{\bar{\sigma}}^{+\sigma} \tau dz - \int_{\bar{\zeta}}^{+\zeta} \tau dz, \end{aligned}$$

oder, wenn wir allgemein mit

$$\int_{z_0}^{z_1} \tau dz$$

ein Integral bezeichnen, dessen Integrationsweg von  $z_0$  längs der Linie  $L$  nach  $z_1$  führt:

$$\Delta J_\sigma - \Delta J_\zeta = \int_{\bar{\sigma}}^{+\sigma} \tau dz - \int_{\bar{\zeta}}^{+\zeta} \tau dz.$$

Da  $\tau$  zu beiden Seiten von  $S$  in je zwei gegenüberliegenden Punkten denselben Wert hat, so sind die zwei Integrale rechts einander gleich, und es folgt

$$\Delta J_\sigma = \Delta J_\zeta, \text{ w. z. b. w.}$$

Die für jeden einzelnen der  $3p + r$  Schnitte  $a, b, c, l$  konstante und endliche Wertdifferenz der Integralfunktion  $J$  heißt, nach Riemann, der Periodizitätsmodul von  $J$  an

dem betreffenden Schnitte.  $J$  hat also in  $T''$   $3p + r$  Periodizitätsmoduln und zwar sei

$$\begin{array}{lcl} \text{an } a_\lambda : \Delta J = A_\lambda, \\ 3^\circ) \quad \text{,, } b_\lambda : \Delta J = B_\lambda, \\ \text{,, } c_\lambda : \Delta J = C_\lambda, \\ \text{,, } l_\varrho : \Delta J = L_\varrho. \end{array}$$

Für diese konstante Periodizitätsmoduln gelten folgende zwei Sätze:

**Satz III<sup>o</sup>)** Alle  $C_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2 \dots p$ ) sind gleich Null.

Beweis: Da der Periodizitätsmodul  $C_\lambda$  längs  $c_\lambda$  konstant ist, so ist es gleichgültig, an welcher Stelle von  $c_\lambda$  wir den Wert von  $C_\lambda$  bestimmen; wir wählen die Kreuzungsstelle der drei Querschnitte  $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$  (Fig. 33). Es ist nun:

$$\begin{aligned} C_\lambda &= J_\varepsilon - J_\delta = J_\varepsilon - J_\alpha + J_\alpha - J_\beta + J_\beta - J_\gamma + J_\gamma - J_\delta \\ &= A_\lambda + B_\lambda - A_\lambda - B_\lambda = 0, \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Die Querschnitte  $c_\lambda$  sind also für das Eindeutigmachen von  $J$  überflüssig.

**Satz IV<sup>o</sup>)** Bezeichnen  $G_1 \dots G_\varrho \dots G_r$  die Gewichte der logarithmischen Unstetigkeiten von  $J$  in den Punkten  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\varrho \dots \varepsilon_r$ , so ist an  $l_\varrho$ :

$$4^\circ) \quad L_\varrho = 2\pi i \cdot G_\varrho.$$

Beweis: Es ist  $L_\varrho = \int_{s_\varrho} \tau dz$ , wo die Integrationsvariable  $z$  einen (in  $T$  geschlossenen) Ringweg um den Punkt  $s_\varrho$  durchläuft. Andererseits ist nach Definition (§ 12):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s_\varrho} \tau dz = G_\varrho,$$

woraus die Richtigkeit des Satzes sich ohne weiteres ergibt.

Für die Periodizitätsmoduln des Integrals der Klasse  $J = \int \tau dz$  haben wir so die Tabelle

|     |                      |        |        |        |                     |
|-----|----------------------|--------|--------|--------|---------------------|
|     | an                   | $a_1,$ | $b_1,$ | $c_1,$ | $l_q.$              |
| 5°) | $\overline{J} - J =$ | $A_1,$ | $B_1,$ | $0,$   | $2\pi i \cdot G_q.$ |

Legt man dem Integrationswege  $l$  von  $J = \int \left| \frac{a}{e} \right|_{a_0} \tau dz$

die Beschränkung auf, die Querschnitte  $a_1, b_1, c_1$  und die Schnitte  $l_q$  nicht zu überschreiten, so ist  $J$  in  $T''$  eindeutig. Hebt man diese Beschränkung für  $l$  auf und läßt man  $l$

|       |         |                  |    |                   |
|-------|---------|------------------|----|-------------------|
| $d_1$ | mal von | $\overline{a_1}$ | zu | $^+ a_1,$         |
| $e_1$ | "       | $^+ a_1$         | "  | $\overline{a_1},$ |
| $f_1$ | "       | $\overline{b_1}$ | "  | $^+ b_1,$         |
| $g_1$ | "       | $^+ b_1$         | "  | $\overline{b_1},$ |
| $h_1$ | "       | $\overline{c_1}$ | "  | $^+ c_1,$         |
| $i_1$ | "       | $^+ c_1$         | "  | $\overline{c_1},$ |
| $k_q$ | "       | $\overline{l_q}$ | "  | $^+ l_q,$         |
| $m_q$ | "       | $^+ l_q$         | "  | $\overline{l_q}$  |

übergehen, so erhält  $J$  in  $a$  den Wert:

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^p \left\{ (d_i - e_i) A_i + (f_i - g_i) B_i \right\} + 2\pi i \cdot \sum_{q=1}^r (k_q - m_q) G_q,$$

wo  $J_0$  den Wert bezeichnet, den  $J$  in  $T''$  annimmt. — Dies giebt den

**Satz V°)** Das in  $T''$  eindeutige Integral  $J = \int \tau dz$  ist in  $T$  unendlich vieldeutig; alle Werte, die es in einem Punkte  $a$  von  $T$  annehmen kann, sind gegeben durch die Formel

$$6^\circ) \quad J = J_0 + \sum_{i=1}^p (k_i A_i + m_i B_i) + 2\pi i \cdot \sum_{q=1}^r n_q \cdot G_q,$$

wo  $k_1, m_1, n_1$  beliebige ganze Zahlen sind, und  $J_0$  den Wert bezeichnet, den das Integral in  $T''$  im Punkte  $a$  annimmt.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar: ist der Integrationsweg  $l$  von  $J$  ein beliebiger, geschlossener Weg in  $T$ , so ist der Wert, den das Integral auf diesem Ringwege erreicht, eine lineare Funktion der  $2p + r$  Periodizitätsmoduln mit ganzzahligen Koeffizienten.

Fassen wir das Vorhergehende kurz zusammen, so können wir sagen:

**Satz VI<sup>o</sup>)** Die unterscheidenden Merkmale der Funktionen der Klasse und der Integrale der Klasse sind die folgenden:

1<sup>o</sup>) Die Funktionen der Klasse werden in  $T$  nur algebraisch unstetig; die Integrale der Klasse werden in  $T$  im allgemeinen nicht nur algebraisch, sondern auch logarithmisch unstetig.

2<sup>o</sup>) Die Funktionen der Klasse sind eindeutige Funktionen des Ortes in  $T$ ; die Integrale der Klasse sind in  $T$  unendlich vieldeutig, und die Werte eines Integrals der Klasse für einen bestimmten Punkt  $(s, z)$  von  $T$  unterscheiden sich um ganze Vielfache der  $2p + r$  Periodizitätsmoduln  $A_1, B_1, 2\pi i \cdot G_0$ .

Die in 1<sup>o</sup>) und 2<sup>o</sup>) formulierten Eigenschaften kennzeichnen umgekehrt ein Integral der Klasse, d. h.

**Satz VII<sup>o</sup>)** Ist von einer Funktion  $J$  nachgewiesen, daß sie in  $T$  im allgemeinen eindeutig und stetig ist und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten  $(s, z)$  logarithmisch unstetig oder zu endlicher Ordnung algebraisch unstetig wird, daß sie ferner an den Querschnitten  $a_1, b_1$  und an den nach den logarithmischen Unstetigkeitspunkten gezogenen Schnitten  $l_0$  konstante Wertdifferenzen besitzt, so ist  $J$  ein Integral der Klasse.

Beweis: Besitzt  $J$  die eben aufgezählten Eigenschaften, so ist  $\frac{dJ}{dz}$  eine Funktion, die in  $T$  eindeutig ist und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten zu endlicher Ordnung unendlich wird. Nach Satz I<sup>o</sup>) § 12 ist daher  $\frac{dJ}{dz}$  eine Funktion der Klasse,<sup>\*)</sup> und  $J$  selbst ein Integral der Klasse.

In den folgenden Paragraphen betrachten wir zunächst die einfachsten Integrale der Klasse. Wir unterscheiden drei Arten derselben:

1<sup>o</sup>) Integrale I. Gattung, die in  $T'$  überall eindeutig und stetig sind.

2<sup>o</sup>) Integrale II. Gattung, die in  $T'$  überall eindeutig sind und nur in einzelnen Punkten algebraisch unstetig werden.

3<sup>o</sup>) Integrale III. Gattung, die in  $T$  nur logarithmisch unstetig werden.

Wir werden diese drei Gattungen von Integralen der Reihe nach besprechen, unter Zugrundelegung der Voraussetzung, daß  $T$  nur einfache Verzweigungspunkte und einfache Doppelpunkte besitzt.

### § 19. Das Integral I. Gattung.<sup>\*\*)</sup>

Wir knüpfen an an die in § 12 gegebene Darstellung einer Funktion  $\sigma$  der Klasse in der Form:

$$1^o) \quad \sigma = \psi(s, z) = R + R_1 s + \dots + R_{n-1} s^{n-1},$$

in der  $R, R_1, \dots, R_{n-1}$  rationale Funktionen von  $z$  sind, und stellen uns die Aufgabe, die Funktion  $\sigma = \psi(s, z)$  so zu bestimmen, daß

$$2^o) \quad w = \int \sigma dz = \int \psi(s, z) dz$$

<sup>\*)</sup> Im obigen Satze bezeichnet der Ausdruck „Funktion der Klasse“ kurz eine algebraische Funktion der Klasse, während derselbe Ausdruck in Satz I<sup>o</sup>) § 12 eine Funktion bezeichnet, der die Eigenschaft zukommt, in  $T$  eindeutig zu sein.

<sup>\*\*) Christoffel: Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear unabhängigen Integrale I. Gattung. *Annali di Matematica*, Ser. 2 t. X. pag. 81–100. 1880.</sup>

in  $T$  nirgends unstetig wird. Wir setzen dabei voraus, die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  sei irreducibel und, wenn nötig, durch eine lineare Substitution so umgeformt (siehe § 9), daß die Funktion  $s$  weder für  $z = \infty$  unendlich werde, noch für endliche Werte von  $z$ , denen Wurzelkoincidenzen entsprechen, und daß für  $z = \infty$  keine Wurzelkoincidenz statfinde.

Soll  $w = \int \sigma dz$  in  $T$  nie unstetig werden, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1°) In einem gewöhnlichen Punkte  $z = \alpha$  von  $T$ , der kein Verzweigungspunkt ist und im Endlichen liegt, muss  $\sigma$  stetig sein, d. h. die für diesen Punkt geltende Reihenentwicklung von  $\sigma$  nach ganzen Potenzen von  $z - \alpha$  darf keine Potenz von  $z - \alpha$  mit negativem Exponenten enthalten; für einen solchen Punkt muß also

$$\lim (z - \alpha) \cdot \sigma = 0 \text{ sein;}$$

2°) für  $z = \infty$  muß  $\sigma = 0^2$  werden;

3°) ist  $z = \alpha$  ein Verzweigungspunkt, so darf dort  $\sigma$  unstetig werden, aber nur wie  $\frac{1}{\sqrt{z - \alpha}}$ , so daß für einen solchen Punkt wieder:

$$\lim (z - \alpha) \cdot \sigma = 0 \text{ wird.}$$

Diese 3 notwendigen Bedingungen sind, wie unmittelbar ersichtlich, uns ausreichend, damit  $w = \int \sigma dz$  in  $T$  nirgends unstetig werde.

Um der noch nicht näher bestimmten Funktion  $\sigma$  der Klasse die in den Bedingungen 1°), 2°) und 3°) verlangten Eigenschaften aufzuprägen, gehen wir aus von der Lagrange'schen Interpolationsformel

$$3^\circ) \quad \psi(t, z) = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{F'(s_i, z)} \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_i},$$

aus der wir früher die allgemeine Darstellung der Funktion  $\sigma$  der Klasse als ganze Funktion von  $s$  und rationale Funktion von  $z$  abgeleitet haben. In dieser Formel, in der  $t$  einen beliebig, aber fest angenommenen Parameter bedeutet, be-

zeichnen  $s_1 \dots s_i \dots s_n$  die Werte von  $s$  für ein und dasselbe unbestimmte  $z$ ,  $\sigma_1 \dots \sigma_i \dots \sigma_n$  die aus 1°) sich ergebenden zugehörigen Werte von  $\sigma$ .

Die durch 3°) definierte Funktion  $\psi(t, z)$  ist Funktion von  $z$  allein. Wir untersuchen zunächst, wo und wie  $\psi(t, z)$  als Funktion von  $z$  unstetig wird, wenn die auf der rechten Seite von 3°) auftretenden Grössen  $\sigma_i$  die Bedingungen 1°), 2°) und 3°) erfüllen, und wie sich unter dieser Voraussetzung der Ausdruck für  $\psi(t, z)$  gestaltet.

Der zweite Faktor  $\frac{F(t, z)}{t - s_i}$  irgend eines Summanden von  $\psi$  bleibt stetig, wenn  $s_i = t$  wird, da, wegen  $F(t, z) = \varphi_0 \cdot (t - s_1)(t - s_2) \dots (t - s_n)$ ,  $t - s_i$  in  $F(t, z)$  aufgeht. Im Endlichen kann dieser Faktor nicht weiter unstetig werden; im Unendlichen wird er  $= \infty^m$ . Zugleich wird aber auch  $F'(s_i, z) = \infty^m$  und  $\sigma_i = 0^2$ ; für  $z = \infty$  wird also  $\psi(t, z) = 0^2$ , d. h. nicht unstetig. Unstetigkeiten von  $\psi(t, z)$  können daher nur im Endlichen vorkommen und zwar sind sie nur dort zu erwarten, wo der erste Faktor

$$\tau_i = \frac{\sigma_i}{F'(s_i, z)}$$

irgend eines Summanden von  $\psi$  unstetig wird. Letzteres kann nur eintreten, wenn entweder

1°)  $\sigma_i$  unstetig wird, d. h. in den  $v$  Verzweigungspunkten von  $T$ , oder wenn

2°)  $F'(s_i, z)$  Null wird, d. h. in den  $r$  Doppelpunkten und  $v$  Verzweigungspunkten von  $s$ .

Ist  $z = \beta_i$  ein Verzweigungspunkt, in dem  $s_1 = s_2 = \alpha_i$  wird, so werden an dieser Stelle  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  unstetig wie  $(z - \beta_i)^{-\frac{1}{2}}$ , während  $\sigma_3, \dots, \sigma_n$  stetig bleiben; ferner werden an derselben Stelle  $F'(s_1, \beta_i)$  und  $F'(s_2, \beta_i)$  gleich Null wie  $(z - \beta_i)^{\frac{1}{2}}$ , während  $F'(s_3, \beta_i), \dots, F'(s_n, \beta_i)$  von Null verschieden bleiben. Im Verzweigungspunkte  $(\alpha_i, \beta_i)$  ist daher  $\lim (z - \beta_i) \tau_3 = \lim (z - \beta_i) \tau_4 = \dots = \lim (z - \beta_i) \tau_n = 0$ , aber

$$\lim (z - \beta_i) \tau_1 \text{ und } \lim (z - \beta_i) \tau_2$$

weder Null noch unendlich. Bezeichnet man folglich den gemeinsamen konstanten Wert von

$$\lim (z - \beta_i) \cdot \tau_1 = \lim \frac{\sigma_1 \cdot (z - \beta_i)}{F'(s_1, \beta_i)}$$

$$\text{und } \lim (z - \beta_i) \cdot \tau_2 = \lim \frac{\sigma_2 \cdot (z - \beta_i)}{F''(s_2, \beta_i)}$$

mit  $\frac{1}{2} A_i$ , so erhält man:

$$\lim (z - \beta_i) \cdot \psi(t, z) = A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{t - \alpha_i}.$$

Für  $z = \beta_i$  wird demnach  $\psi(t, z)$  unstetig, und zwar ist dort:

$$\psi(t, z) = A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)(z - \beta_i)} + \text{functio continua.}$$

Ist  $z = \beta_x$  ein Doppelpunkt, in dem etwa  $s_1 = s_2 = \alpha_x$  wird, so bleiben dort  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_n$  stetig, aber  $F'(s_1, \beta_i)$  und  $F''(s_2, \beta_i)$  werden  $= 0$  wie  $(z - \beta_i)$ , während  $F'(s_3, \beta_i), \dots F'(s_n, \beta_i) \neq 0$  bleiben.

Bezeichnet man daher den gemeinsamen, konstanten Wert von

$$\lim (z - \beta_x) \cdot \tau_1 \text{ und } \lim (z - \beta_x) \cdot \tau_2$$

mit  $\frac{1}{2} A_x$ , so ist für  $z - \beta_x$ :

$$\lim (z - \beta_x) \cdot \psi(t, z) = A_x \cdot \frac{F(t, \beta_x)}{t - \alpha_x},$$

oder:

$$\psi(t, z) = A_x \cdot \frac{F(t, \beta_x)}{(t - \alpha_x)(z - \beta_x)} + \text{functio continua.}$$

Die Funktion  $\psi(t, z)$  wird also nur in den  $v + r$  Doppelpunkten von  $s$  mit oder ohne Verzweigung unstetig, und zwar ist, wenn wir die Koordinaten dieser  $v + r$  Punkte promiscue mit  $\alpha_i, \beta_i$  bezeichnen, für einen solchen Punkt allgemein:

$$\psi(t, z) = A_i \cdot T_i(t, z) + f. \text{ continua, wo}$$



$$4^0) \quad T_i(t, z) = \frac{F(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)(z - \beta_i)}$$

eine Funktion ist, die für  $z = \infty$  verschwindet. Es folgt hieraus, daß die Differenz

$$\psi(t, z) - \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot T_i(t, z)$$

eine in  $T$  überall stetige Funktion von  $z$  ist, die, weil sie für  $z = \infty$  verschwindet, überall den konstanten Wert Null hat.

Wir erhalten so, auf Grund der von  $\sigma$  zu erfüllenden Bedingungen 1<sup>0</sup>), 2<sup>0</sup>) und 3<sup>0</sup>), für  $\psi(t, z)$  die Ausdrucksform:

$$5^0) \quad \psi(t, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot T_i(t, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)(z - \beta_i)}.$$

Denkt man sich hierin  $\frac{1}{z - \beta_i}$  nach Potenzen von  $\frac{1}{z}$  entwickelt:

$$\frac{1}{z - \beta_i} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{\beta_i}{z} + \frac{\beta_i^2}{z^2} + \dots \right),$$

und berücksichtigt man, daß infolge der Bedingung 2<sup>0</sup>)  $\psi(t, z)$  für  $z = \infty$  mindestens zur zweiten Ordnung verschwindet, so sieht man, daß zwischen den Koeffizienten  $A_i$  die einschränkende Beziehung

$$1^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{t - \alpha_i} = 0$$

besteht, die ausdrückt, daß in der Entwicklung von  $\psi(t, z)$  nach Potenzen von  $\frac{1}{z}$  der Koeffizient der ersten Potenz von  $\frac{1}{z}$  fehlt.

Die Funktion  $\psi(t, z)$  geht (§ 12), wenn wir in ihr den willkürlichen Parameter  $t$  durch  $s$  ersetzen, über in  $\psi(s, z) = \sigma$ .

Wir erhalten daher aus 5°), für die zu konstruierende Funktion  $\sigma$  der Klasse die Ausdrucksform:

$$6^{\circ}) \quad \sigma = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot T_i(s, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(s, \beta_i)}{(s - \alpha_i)(z - \beta_i)}.$$

Wir untersuchen, ob dieser Ausdruck unter der Voraussetzung I°) für die  $A_i$ , den Bedingungen genügt, die  $\sigma$  zu erfüllen hat.

Für  $z = \infty$  wird wegen I°) auf jedem Blatte von  $T: \sigma = 0^2$ , wie es sein muß.

Für endliche Werte von  $z$  hängt das Verhalten von  $\sigma$  vom Verhalten der  $v + r$  Funktionen:

$$T_i(s, z) = \frac{F(s, \beta_i)}{(s - \alpha_i)(z - \beta_i)}$$

ab. Unstetigkeiten dieser Funktionen sind für endliche Werte von  $z$  nur zu erwarten, wenn von den zwei Gleichungen  $s - \alpha_i = 0$ ,  $z - \beta_i = 0$  eine erfüllt ist unter Ausschluss der andern, oder wenn beide Gleichungen erfüllt sind, oder endlich wenn  $s = \infty$  wird.

a) Wird  $s = \alpha_i$ , aber nicht  $z = \beta_i$  ( $s$  nimmt den Wert  $\alpha_i$  in  $m$  Punkten von  $T$  an), so ist  $s - \alpha_i$  ein Wurzelfaktor des Zählers von  $T_i$ ;  $T_i$  bleibt also stetig, und dasselbe gilt von  $\sigma$  und von  $\int \sigma dz$ . — Wird  $z = \beta_i$ , aber nicht  $s = \alpha_i$  (es ist das einer der  $n - 2$  Punkte, die unter den Verzweigungspunkten oder Doppelpunkten  $s = \alpha_i$ ,  $z = \beta_i$  von  $T$  liegen), so bleiben wieder  $T_i$ ,  $\sigma$  und  $\int \sigma dz$  stetig.

b) Wird zugleich  $s = \alpha_i$  und  $z = \beta_i$  (dies geschieht in den Verzweigungspunkten und den Doppelpunkten), so enthält der Zähler von  $T_i$  den Wurzelfaktor  $s - \alpha_i$  zweimal, und  $T_i$  läßt sich schreiben in der Form:

$$T_i = \frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i} \cdot P,$$

wo  $P$  eine Funktion ist, die für  $s = \alpha_i$ ,  $z = \beta_i$  einen bestimmten, endlichen, von Null verschiedenen Wert hat.

Ist nun  $s = \alpha_i$ ,  $z = \beta_i$  ein Verzweigungspunkt, so ist daselbst

$$s - \alpha_i = (z - \beta_i)^{\frac{1}{2}} [a_1 + a_2 (z - \beta_i)^{\frac{1}{2}} + \dots],$$

und daher

$$\frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i} = (z - \beta_i)^{-\frac{1}{2}} [a_1 + a_2 (z - \beta_i)^{\frac{1}{2}} + \dots]$$

für  $s = \alpha_i$ ,  $z = \beta_i$  unstetig wie  $(z - \beta_i)^{-\frac{1}{2}}$  (für  $a_1 \neq 0$ ); dasselbe gilt für  $T_i$  und folglich auch für  $\sigma$ , da alle übrigen  $T_k$  ( $k \neq i$ ) für  $s = \alpha_i$ ,  $z = \beta_i$  stetig bleiben.  $\int \sigma dz$  bleibt also jedenfalls stetig.

Ist  $s = \alpha_i$ ,  $z = \beta_i$  ein Doppelpunkt ohne Verzweigung, so hat in diesen zwei Punkten  $P$  denselben Wert, und dasselbe gilt von denjenigen  $T_k$  ( $k \neq i$ ), welche den Faktor  $\frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i}$  nicht enthalten. Dagegen hat  $\frac{s - \alpha_i}{z - \beta_i}$ , wie die Betrachtung der Reihenentwickelungen der für  $s = \alpha_i$ ,  $z = \beta_i$  gleich werdenden Wurzeln zeigt, in den zwei diesem Doppelpunkte von  $s$  entsprechenden Punkten von  $T_i$  ungleiche Werte, und dasselbe gilt von  $T_i$ ; da diese Werte übrigens endlich sind, so ist  $\sigma$  stetig in jedem Doppelpunkte.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich ein für das Folgende wichtiges Resultat. Die  $v + r$  Funktionen  $T_i(s, z)$  sind den Verzweigungspunkten und Doppelpunkten so zugeordnet, daß in jedem Verzweigungspunkte  $(\alpha_i, \beta_i)$  die eine Funktion  $T_i(s, z)$  unstetig wird, in deren Ausdruck die Koordinaten dieses Punktes auftreten, während alle übrigen dort stetig bleiben, und daß in den zwei in  $T_i$  getrennten Punkten eines jeden Doppelpunktes von  $s$  die Funktion  $T_i$  ungleiche Werte annimmt, deren Ausdruck die Koordinaten dieses Punktes enthält, alle übrigen aber gleiche Werte. — Hieraus folgt:

**Satz I<sup>o</sup>)** Die  $v + r$  Funktionen  $T_i(s, z)$  sind linear-unabhängig.

Beweis: Wären diese  $v + r$  Funktionen nicht linear-unabhängig, so müsste eine von ihnen, etwa  $T_1$  sich darstellen lassen durch einen Ausdruck:

$$T_1 = \sum_{i=2}^{v+r} C_i \cdot T_i,$$

wo die  $C_i$  Konstanten bedeuten, die nicht alle Null sind. Es müsste dann nach dem Vorigen, wenn  $s = \alpha_1, z = \beta_1$  ein Verzweigungspunkt ist, mindestens eine der  $v + r - 1$  Funktionen rechts in diesem Punkte unstetig werden, und wenn  $s = \alpha_1, z = \beta_1$  ein Doppelpunkt (ohne Verzweigung) ist, mindestens eine dieser Funktionen in den zwei zu diesem Doppelpunkte gehörigen Punkten von  $T$  ungleiche Werte annehmen. Beides ist aber unmöglich.

c) Die bis jetzt besprochenen Fälle a) und b) ziehen keine Unstetigkeit von  $\int \sigma dz$  nach sich. Wird dagegen  $s = \infty$ , was nach unsern Voraussetzungen über die Grundgleichung  $F = 0$  nur für endliche, von  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, v + r$ ) verschiedene Werte von  $z$  stattfinden kann, so wird jedes  $T_i$  und daher auch  $\sigma$  und  $\int \sigma dz$  unstetig. Um diese Unstetigkeiten zu beseitigen, müssen den Koeffizienten  $A_i$  Beschränkungen auferlegt werden, die noch näher zu untersuchen sind.

Bezeichnen wie bisher  $\beta_1 \dots \beta_i \dots \beta_{v+r}$  die Werte von  $z$ , denen die Verzweigungspunkte und Doppelpunkte von  $s$  entsprechen, so ist

$$7^0) \quad \sigma \cdot R(z) = \sigma \cdot (z - \beta_1) \dots (z - \beta_i) \dots (z - \beta_{v+r}),$$

wie sich unmittelbar aus 6<sup>0</sup>) und aus dem Umstand, daß für  $z = \infty: \sigma = 0^s$  wird, ergibt, eine ganze Funktion  $G\left(\begin{smallmatrix} n-1 & v+r-2 \\ s & z \end{smallmatrix}\right)$  von  $s$  und  $z$  von den Graden  $n - 1$  und  $v + r - 2$ . Schreiben wir daher

$$8^0) \quad \sigma = \frac{G\left(\begin{smallmatrix} n-1 & v+r-2 \\ s & z \end{smallmatrix}\right)}{R(z)},$$

so bleibt uns noch die Aufgabe zu erledigen, die Koeffizienten der ganzen Funktion  $G$  so einzuschränken, daß diese Funktion für  $s = \infty$  nicht mehr unstetig wird.

Zu dem Zwecke schicken wir eine Vorbetrachtung voraus. Es seien  $f_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ ) ganze Funktionen von  $s$  und  $z$  von der Form:

$$9^0) \quad f_\mu = \varphi_0 \cdot s^\mu + \varphi_1 s^{\mu-1} + \dots + \varphi_\mu,$$

worin  $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_\mu$  identisch sind mit den Koeffizienten der Grundgleichung

$$F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_n = 0.$$

Schreibt man diese letztere Gleichung in der Form:

$$\varphi_0 s^\mu + \varphi_1 s^{\mu-1} + \dots + \varphi_\mu = -\frac{\varphi_{\mu+1}}{s} - \frac{\varphi_{\mu+2}}{s^2} - \dots - \frac{\varphi_n}{s^{n-\mu}}$$

so erkennt man sogleich, daß die  $n$  Funktionen  $f_\mu$  für  $s = \infty$  nicht unstetig werden, sondern zur ersten Ordnung verschwinden, und daß insbesondere  $f_n$  identisch gleich Null ist.

Ist nun

$$H = c s^\mu + c_1 s^{\mu-1} + \dots + c_\mu$$

irgend eine ganze Funktion von  $s$  und  $z$ , die in  $s$  vom  $\mu^{\text{ten}}$  Grade ist und daher für  $s = \infty$  im allgemeinen unendlich zur Ordnung  $\mu$  wird, so wird der Quotient

$$\begin{aligned} \frac{H}{f_\mu} &= \frac{c s^\mu + c_1 s^{\mu-1} + \dots + c_\mu}{\varphi_0 s^\mu + \varphi_1 s^{\mu-1} + \dots + \varphi_\mu} \\ &= \frac{c}{\varphi_0} + \left[ \left( c_1 - \frac{c}{\varphi_0} \varphi_1 \right) s^{\mu-1} + \left( c_2 - \frac{c}{\varphi_0} \varphi_2 \right) s^{\mu-2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left( c_\mu - \frac{c}{\varphi_0} \varphi_\mu \right) \right] : f_\mu \end{aligned}$$

für  $s = \infty$  unendlich zur Ordnung  $\mu + 1$ . Soll  $H$  für  $s = \infty$  nicht unstetig werden oder doch zu einer geringern als der  $\mu^{\text{ten}}$  Ordnung, also  $\frac{H}{f_\mu}$  zu einer geringern als der  $(\mu + 1)^{\text{ten}}$  Ordnung unendlich werden, so darf, wenn man berücksichtigt, daß  $s = \infty$  wird nur wenn  $\varphi_0 = 0$  wird,  $\frac{c}{\varphi_0}$  für  $s = \infty$  nicht unendlich werden, d. h.  $c$  muß ohne Rest durch  $\varphi_0$  teilbar, also

$$c = b_0 \cdot \varphi_0$$

sein, wo  $b_0$  eine ganze Funktion von  $z$  ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 H &= b_0 \cdot f_\mu + (c_1 - b_0 \varphi_1) s^{\mu-1} + (c_2 - b_0 \varphi_2) s^{\mu-2} + \dots \\
 &\quad + (c_\mu - b_0 \varphi_\mu) \\
 &= b_0 \cdot f_\mu + P(s, z),
 \end{aligned}$$

wo  $P$  eine ganze Funktion von  $s$  und  $z$  bezeichnet, die in  $s$  nur bis zum Grade  $\mu - 1$  ansteigt. Diese Funktion  $P$  wird für  $s = \infty$  im allgemeinen  $= \infty^{\mu-1}$ ; soll sie für  $s = \infty$  zu einer niedrigeren Ordnung unendlich werden, so muß, wie den vorigen analoge Betrachtungen zeigen, der Koeffizient von  $s^{\mu-1}$  ohne Rest durch  $\varphi_0$  teilbar sein, d. h.  $P(s, z)$  sich darstellen lassen durch einen Ausdruck von der Form

$$b_1 \cdot f_{\mu-1} + P_1(s, z),$$

wo  $b_1$  eine ganze Funktion von  $z$ , und  $P_1$  eine ganze Funktion von  $s$  und  $z$  ist, die in  $s$  bis zum Grade  $\mu - 2$  ansteigt.

So setzt sich das fort. — Soll  $H$  für  $s = \infty$  überhaupt nicht unendlich werden, so muss  $H$  die Form haben:

$$H = b_0 \cdot f_\mu(z, s) + b_1 \cdot f_{\mu-1}(s, z) + \dots + b_{\mu-1} f_1(s, z) + b_\mu,$$

wo  $b_0, b_1 \dots b_\mu$  ganze Funktionen von  $z$  sind.

Wendet man dieses Resultat an auf die Funktion  $G\left(s^{\frac{n-1}{v+r-2}}, z^{\frac{v+r-2}{v+r-2}}\right)$  in 8°), so folgt: soll  $G$  für  $s = \infty$  nicht unstetig werden, so muß  $G$  notwendig die Form besitzen:

$$\begin{aligned}
 9^\circ) \quad G\left(s^{\frac{n-1}{v+r-2}}, z^{\frac{v+r-2}{v+r-2}}\right) &= A_0(z) \cdot f_{n-1}(s, z) + A_1(z) \cdot f_{n-2}(s, z) + \dots \\
 &\quad + A_{n-2}(z) \cdot f_1(s, z) + A_{n-1}(z),
 \end{aligned}$$

wo  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  ganze Funktionen von  $z$  sind, und zwar, da zufolge unserer Voraussetzungen über die Grundgleichung  $F=0: \varphi_0$  in  $z$  vom Grade  $m$  ist,  $A_0, \dots, A_{n-2}$  ganze Funktionen vom Grade  $v + r - m - 2$ ,  $A_{n-1}$  eine Funktion vom Grade  $v + r - 2$ .

Welche Bedingungen müssen nun die Koeffizienten  $A_i$  in 5°) erfüllen, damit bei den eben angegebenen Graden von  $A_0, A_1 \dots A_{n-1}$  identisch

$$A^\circ) \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)(z - \beta_i)} = \frac{1}{R(z)} \cdot \left[ \sum_{v=0}^{n-2} A_v(z) \cdot f_{n-v-1}(t, z) + A_{n-1}(z) \right]$$

sei?

$$\begin{aligned} (t - \alpha) \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha^\nu \cdot f_{n-\nu-1}(t, \beta) = & F(t, \beta) - \alpha \cdot f_{n-1} - \varphi_n \\ & + \alpha \cdot f_{n-1} - \alpha^2 f_{n-2} - \alpha \cdot \varphi_{n-1} \\ & + \alpha^2 \cdot f_{n-2} - \alpha^3 f_{n-3} - \alpha^2 \cdot \varphi_{n-2} \\ & + . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \alpha^\nu \cdot f_{n-\nu} - \alpha^{\nu+1} f_{n-\nu-1} - \alpha^\nu \varphi_{n-\nu} \\ & + . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \alpha^{n-2} \cdot f_2 - \alpha^{n-1} \cdot f_1 - \alpha^{n-2} \varphi_2 \\ & + \alpha^{n-1} \cdot f_1 - \alpha^n \cdot f_0 - \alpha^{n-1} \varphi_1, \end{aligned}$$

oder, mit Weglassung der sich aufhebenden Glieder:

$$(t - \alpha) \cdot \sum_{v=0}^{n-1} \alpha^v f_{n-v-1}(t, \beta) = F(t, \beta) - K,$$

wo

$$K = \alpha^n \cdot f_0 + \varphi_1 \cdot \alpha^{n-1} + \varphi_2 \cdot \alpha^{n-2} + \dots \\ + \varphi_{n-v} \cdot \alpha^{n-v} + \dots + \varphi_{n-1} \cdot \alpha + \varphi_n,$$

oder, da  $f_0 = \varphi_0(\beta)$ :

$$K = \varphi_0(\beta) \cdot \alpha^n + \varphi_1(\beta) \cdot \alpha^{n-1} + \dots + \varphi_n(\beta) = F\left(\alpha, \beta\right) = 0$$

ist, da  $s = \alpha$  eine der Wurzeln von  $F\left(s, z\right) = 0$  ist, die zu  $z = \beta$  gehören. Wir haben somit die Beziehung:

$$(t - \alpha) \cdot \sum_{v=0}^{n-1} \alpha^v \cdot f_{n-v-1}(t, \beta) = F(t, \beta),$$

oder

$$\frac{F(t, \beta)}{t - \alpha} = \sum_{v=0}^{n-1} \alpha^v \cdot f_{n-v-1}(t, \beta),$$

die für  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_v + r, \beta = \beta_1, \beta_2 \dots \beta_v + r$  gilt. — Mit Benutzung dieser Beziehung geht die von den Koeffizienten  $A_i$  zu erfüllende Bedingung 10<sup>o</sup>) über in:

$$11^o) \quad A_i \cdot \sum_{v=0}^{n-2} \alpha_i^v \cdot f_{n-v-1}(t, \beta_i) + A_i \cdot \alpha_i^{n-1} \cdot \varphi_0(\beta_i) \\ = \sum_{v=0}^{n-2} \frac{A_v(\beta_i)}{R'(\beta_i)} \cdot f_{n-v-1}(t, \beta_i) + \frac{A_{n-1}(\beta_i)}{R'(\beta_i)}.$$

Da diese Bedingung für jeden Wert von  $t$  identisch erfüllt sein muß, so müssen die beiderseitigen Koeffizienten gleicher Potenzen von  $t$  dieselben sein. Da ferner beiderseits  $t^{n-1}$  in  $f_{n-1}(t, \beta_i) = \varphi_0(\beta_i) \cdot t^{n-1} + \dots$  den, wegen unserer Voraussetzungen über die Grundgleichung  $F = 0$ , von Null verschiedenen Koeffizienten  $\varphi_0(\beta_i)$  hat, so muß

$$A_i = \frac{A_0(\beta_i)}{R'(\beta_i)}$$

sein, d. h. die beiderseitigen Koeffizienten von  $f_{n-1}(t, \beta_i)$  in 11<sup>o</sup>) müssen einander gleich sein. Nimmt man beiderseits



das Glied mit  $f_{n-1}$  weg, so ergibt sich ebenso die Gleichheit der Koeffizienten von  $f_{n-2}$  u. s. w. — Man erhält so zur identischen Erfüllung von A<sup>0</sup>) die Bedingungen:

$$B^0) \quad \begin{cases} \frac{A_\nu(\beta_i)}{R'(\beta_i)} = A_i \cdot \alpha_i^\nu, & (\nu = 0, 1, 2 \dots n-2) \\ \frac{A_{n-1}(\beta_i)}{R'(\beta_i)} = A_i \cdot \alpha_i^{n-1} \varphi_0(\beta_i), \end{cases}$$

für  $i = 1, 2 \dots v+r$ . — Berücksichtigt man weiter, daß die Partialbruchzerfällungen von  $\frac{A_\nu(z)}{R(z)}$  und  $\frac{A_{n-1}(z)}{R(z)}$  von der Form:

$$\frac{A_\nu(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_\nu(\beta_i)}{R'(\beta_i)} \cdot \frac{1}{z - \beta_i}, \quad (\nu = 0, 1, 2 \dots n-2)$$

$$\frac{A_{n-1}(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_{n-1}(\beta_i)}{R'(\beta_i)} \cdot \frac{1}{z - \beta_i}$$

sind, so sieht man sogleich ein, daß die Bedingungen B<sup>0</sup>) sich ersetzen lassen durch die folgenden:

$$C^0) \quad \begin{cases} \frac{A_\nu(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_i \cdot \alpha_i^\nu}{z - \beta_i}, & (\nu = 0, 1, \dots n-2), \\ \frac{A_{n-1}(z)}{R(z)} = \sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_i \cdot \alpha_i^{n-1} \cdot \varphi_0(\beta_i)}{z - \beta_i}. \end{cases}$$

Die hierin auftretenden ganzen Funktionen  $A_\nu$ ,  $A_{n-1}$  und  $R$  sind, wie schon erwähnt, in  $z$  von den Graden  $v+r-m-2$ ,  $v+r-2$  und  $v+r$ . Denkt man sich daher die linken Seiten von C<sup>0</sup>) entwickelt nach Potenzen von  $z$ , so enthalten diese Entwicklungen nur Potenzen von  $z$  mit negativen Exponenten, und zwar beginnt die absteigende Entwicklung von  $\frac{A_\nu(z)}{R(z)}$  mit einem Glied mit  $z^{-m-2}$ , die von  $\frac{A_{n-1}(z)}{R(z)}$  mit einem Gliede mit der Potenz  $z^{-2}$ . Entwickelt man auch die rechten Seiten von C<sup>0</sup>), so muß somit in der Entwicklung von  $\sum_{i=1}^{v+r} \frac{A_i \cdot \alpha_i^\nu}{z - \beta_i}$  die Summe aller Glieder ver-

schwinden, die  $z$  zu einem Exponenten  $-k > -m-2$  enthalten, d. h. es muß sein:

$$\sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0, \quad \text{für } \begin{cases} \nu = 0, 1, 2 \dots n-2, \\ \mu = 0, 1 \dots m. \end{cases}$$

Analog muß in der Entwicklung der rechten Seite der zweiten Bedingung C<sup>0</sup>) die Summe aller Glieder mit  $z^{-1}$  verschwinden. An Stelle von C<sup>0</sup>) erhalten wir so die Bedingungen:

$$\text{II}^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0, \quad \text{für } \begin{cases} \nu = 0, 1, \dots n-2, \\ \mu = 0, 1, \dots m. \end{cases}$$

$$\text{III}^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \alpha_i^{n-1} \cdot \varphi_0(\beta_i) = 0.$$

Diese Bedingungen sind eine unmittelbare Folge von C<sup>0</sup>). Sind umgekehrt diese Bedingungen II<sup>0</sup>) und III<sup>0</sup>) erfüllt, so liefert C<sup>0</sup>) die Funktionen  $\mathcal{A}$  mit den in A<sup>0</sup>) vorgeschriebenen Graden in  $z$ , während zugleich A<sup>0</sup>) erfüllt ist, wenn B<sup>0</sup>) erfüllt ist, und B<sup>0</sup>), wenn C<sup>0</sup>) erfüllt ist. Die Bedingungen II<sup>0</sup>) und III<sup>0</sup>) sind also die notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, daß

$$\sigma = \psi(s, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(s, \beta_i)}{(s - \alpha_i)(z - \beta_i)}$$

für  $s = \infty$  nicht unstetig wird.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so haben wir folgendes Resultat:

Jeder Integrand I. Gattung  $\sigma$  läßt sich in die Form bringen:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(s, \beta_i)}{(s - \alpha_i)(z - \beta_i)} = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot T_i(s, z),$$

wo die  $T_i$  linearunabhängig und die  $A_i$  konstant sind. Umgekehrt ist aber ein Ausdruck dieser Form nur dann ein Integrand I. Gattung, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{I}^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{t - \alpha_i} = 0, \quad \text{für jedes } t;$$

$$\text{II}^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \alpha_i^v \cdot \beta_i^\mu = 0, \text{ für } \begin{cases} v = 0, 1, \dots, n-2, \\ \mu = 0, 1, \dots, m. \end{cases}$$

$$\text{III}^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \alpha_i^{n-1} \cdot \varphi_0(\beta_i) = 0.$$

Die Frage, die sich nun aufwirft, ist die: sind diese Bedingungen alle von einander unabhängig, oder sind eine oder mehrere von ihnen Folge der übrigen? Ist letzteres der Fall, so müssen diese überzähligen Bedingungsgleichungen aus dem System der Bedingungen I<sup>0</sup>), II<sup>0</sup>) und III<sup>0</sup>) weggelassen werden.

Bedeutet  $g\left(\begin{smallmatrix} n-2 & m \\ s & z \end{smallmatrix}\right)$  irgend eine ganze Funktion von  $s$  und  $z$  von den angeschriebenen Graden, so ist

$$g(\alpha_i, \beta_i) = \sum_{v=0}^{n-2} \sum_{\mu=0}^m c_{v\mu} \cdot \alpha_i^v \beta_i^\mu.$$

Das System der  $(n-1)(m+1) = (n-1)(m-1) + 2(n-1) = r+p+2(n-1) = r+v-p$  Bedingungsgleichungen II<sup>0</sup>) läßt sich also dadurch ersetzen, daß man verlangt, es solle für jede ganze Funktion  $g\left(\begin{smallmatrix} n-2 & m \\ s & z \end{smallmatrix}\right)$  sein:

$$\text{II}_s^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot g\left(\begin{smallmatrix} n-2 & m \\ \alpha_i & \beta_i \end{smallmatrix}\right) = 0.$$

Berücksichtigt man nun, daß

$$\frac{1}{n} \cdot F'(s, z) = \varphi_0(z) \cdot s^{n-1} + g\left(\begin{smallmatrix} n-2 & m \\ s & z \end{smallmatrix}\right),$$

und daher

$$\frac{1}{n} \cdot A_i \cdot F'(s, z) = A_i \cdot \varphi_0(z) \cdot s^{n-1} + A_i \cdot g\left(\begin{smallmatrix} n-2 & m \\ s & z \end{smallmatrix}\right)$$

ist, so ergibt die Forderung II<sub>s</sub><sup>0</sup>):

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot F'(\alpha_i, \beta_i) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \varphi_0(\beta_i) \cdot \alpha_i^{n-1},$$

und weiter, da  $F'(\alpha_i, \beta_i) = 0$  ist:

$$\sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \alpha_i^{n-1} \cdot \varphi_0(\beta_i) = 0.$$

Die Bedingung III<sup>0</sup>) ist daher eine Folge von II<sub>2</sub><sup>0</sup>) oder II<sup>0</sup>) und deshalb wegzulassen.

Ferner ist die Bedingung I<sup>0</sup>) der Ausdruck dafür, daß

$$\psi(t, z) = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(t, \beta_i)}{(t - \alpha_i)(z - \beta_i)}$$

gleich 0<sup>2</sup> wird, für  $z = \infty$ . Sind aber die Bedingungen II<sup>0</sup>) und die aus ihnen fließenden Bedingungen III<sup>0</sup>), welche das identische Erfülltsein von  $A^0$ ) mit den früher geforderten Grade von  $A_0, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}$  in  $z$  nach sich ziehen, erfüllt, so folgt aus eben diesen Graden der Funktionen  $A$ , daß  $\psi(t, z)$  für  $z = \infty$  gleich 0<sup>2</sup> wird. Die Bedingung I<sup>0</sup>) ist also ebenfalls eine Folge der Bedingungen II<sup>0</sup>).

Wir haben uns somit nur noch mit diesen Bedingungen II<sup>0</sup>) zu beschäftigen, um festzustellen, ob dieselben überzählige Gleichungen enthalten oder nicht.

Die Gleichungen des Systems II<sup>0</sup>) sind in den unbekannten Koeffizienten  $A_i$  linear und homogen. Enthält ein solches System überzählige Gleichungen, so giebt es stets ein System von Multiplikatoren, die nicht alle Null sind, und die Eigenschaft besitzen, daß bei Multiplikation der Gleichungen II<sup>0</sup>) mit diesen Multiplikatoren und nachherige Addition alle Unbekannten  $A_i$  herausfallen. Ersetzt man dann das System der  $v + r - p$  Gleichungen II<sup>0</sup>) durch die eine Gleichung II<sub>n</sub><sup>0</sup>) und nimmt man in dieser die vorigen Multiplikatoren zu Koeffizienten von  $g \left( s, z \right)$ , so wird

$$g \left( \alpha_i, \beta_i \right) = 0,$$

ohne daß alle Koeffizienten von  $g$  Null sind. Die Funktion  $g$  wird dann also Null in allen Verzweigungspunkten und allen Doppelpunkten von  $s$ , besitzt also  $v + 2r$  Nullpunkte in  $T$ . Dies sind aber auch sämtliche Nullpunkte von  $g$  in  $T$ . Denn  $g$  wird  $\infty^m$  für  $z = \infty$  in jedem der  $n$  Blätter von  $T$ , und ausserdem noch  $m$ -mal (nämlich für  $s = \infty$ )  $\infty^{n-2}$ , und bleibt sonst überall stetig.  $g$  ist also von der Ordnung  $m \cdot n + m(n - 2) = 2m(n - 1) = v + 2r$ .

Berücksichtigt man weiter, daß  $F'(s, z)$  dieselben Null- und Unstetigkeitspunkte hat wie  $g$  und zu denselben Ordnungen, so folgt:

$$\frac{g}{F'}$$

ist eine Funktion der Klasse, die in  $T$  weder Null noch unstetig wird und daher überall denselben von Null verschiedenen konstanten Wert  $C$  hat. Es ist also

$$g - C \cdot F' = 0,$$

oder, wenn wir durch  $-C$  dividieren und den Faktor  $-\frac{1}{C}$  mit  $g$  vereinigen:

$$g + F' = 0.$$

Enthält daher das System II<sup>0</sup>) überzählige Gleichungen, so genügen die Wurzeln  $s$  der irreducibeln Gleichung  $F(s, z) = 0$  auch einer Gleichung niedrigeren Grades

$$12^0) \quad g\left(\begin{smallmatrix} n-2 & m \\ s & , z \end{smallmatrix}\right) + F'(s, z) = 0,$$

die in  $z$  ebenfalls rational ist. Da dies mit der vorausgesetzten Irreducibilität von  $F(s, z) = 0$  in Widerspruch steht, so haben wir den

**Satz II<sup>0</sup>)** Das System der  $v + r - p$  Gleichungen:

$$\text{II}^0) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \alpha_i^v \beta_i^u = 0 \quad \begin{cases} v=0, 1, \dots, n-2, \\ u=0, 1, \dots, m, \end{cases}$$

enthält keine überzähligen Gleichungen.

Die Gleichungen II<sup>0</sup>) erlauben es also,  $v + r - p$  der  $v + r$  Unbekannten  $A_i$  durch die  $p$  übrigen, willkürlich bleibenden linear und homogen auszudrücken. Ausgenommen hiervon ist der Fall  $p = 0$ , in dem alle  $A_i = 0$  sind, und ein Integral I. Gattung daher gar nicht existiert. Sind  $A_1 \dots A_x \dots A_p$  die willkürlich bleibenden Koeffizienten, so lassen sich die andern  $A_\lambda$  ( $\lambda > p$ ) darstellen in der Form:

$$A_\lambda = \sum_{x=1}^p A_x \cdot \mathcal{A}_{x\lambda},$$

wo die  $A_{x\gamma}$  bekanntlich Quotienten von Determinanten sind.  
— Mit Einführung der Bezeichnung:

$$T_x(s, z) + \sum_{\lambda=1}^p A_{x\lambda} \cdot T_\lambda(s, z) = w'_x$$

ergibt sich nun:

$$13^\circ) \sigma = \psi(s, z) = A_1 w'_1 + A_2 w'_2 + \dots + A_x w'_x + \dots + A_p w'_p.$$

Infolge der Willkürlichkeit von  $A_1, \dots, A_p$  sind  $w'_1 \dots w'_p$  Integranden I. Gattung, außerdem sind sie, ebenso wie die  $T_i$ , linearunabhängig. Dies liefert den fundamentalen

**Satz III<sup>0</sup>**) Ist die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  irreducibel, so sind die  $v + r - p$  Gleichungen

$$II^\circ) \quad \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \alpha_i^v \cdot \beta_i^u = 0 \quad \begin{cases} v=0, 1, \dots, n-2, \\ u=0, 1, \dots, m, \end{cases}$$

von einander unabhängig, und jeder vermitteltst dieser Gleichungen der Grundgleichung  $F=0$  zugeordnete Integrand I. Gattung ist von der Form:

$$14^\circ) \quad \sigma = \sum_{i=1}^{v+r} A_i \cdot \frac{F(s, \beta_i)}{(s - \alpha_i)(z - \beta_i)};$$

die Anzahl der linearunabhängigen Integranden I. Gattung ist stets gleich  $p$ , und speziell  $= 0$  für  $p = 0$ .

Die hier abgeleitete Form 14<sup>0</sup>) des Integranden I. Gattung ist nicht die seit Riemann gebräuchliche. Um diese zu erhalten, bilden wir den Ausdruck:

$$15^\circ) \quad \varphi(t, z) = \sum_{x=1}^n \sigma_x \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x}.$$

Diese Funktion  $\varphi(t, z)$  ist ganze Funktion von  $t$ , und zwar höchstens vom Grade  $n-1$ , und rationale Funktion von  $z$ . Für  $t = s_x$  bleibt sie endlich und ebenso für  $\sigma = \infty$ . Denn, wenn  $\sigma = \infty$  wird für  $z = \gamma$ , so ist  $\lim (z - \gamma) \cdot \sigma = 0$ , also auch  $\lim (z - \gamma) \cdot \varphi = 0$  für  $z = \gamma$ . Da ferner für  $z = \infty : \sigma = 0$

und  $\frac{F(t, z)}{t - s_x} = \infty^m$  wird, so ist für  $z = \infty : \varphi = \infty^{m-2}$ .

$\varphi$  ist also eine rationale Funktion von  $z$ , die für endliche Werte von  $z$  nicht unendlich wird, für  $z = \infty$  aber  $= \infty^{m-2}$  wird, und daher eine ganze Funktion von  $z$  vom Grade  $m - 2$ .

Setzt man nun

$$\varphi(t, z) = C \cdot t^{n-1} + C_1 t^{n-2} + \dots + C_{n-1},$$

so folgt, da  $F(t, z) = \varphi_0 \cdot (t - s_1) \dots (t - s_n)$  ist, aus der Definition von  $\varphi$ :

$$C = \varphi_0 \cdot \sum_{x=1}^n \sigma_x.$$

Hierin ist  $S = \sum_{x=1}^n \sigma_x$ :

1<sup>o</sup>) einwertige Funktion von  $z$ ; denn wenn  $z$  in der komplexen Zahlenebene einen Ringweg beschreibt, so ändert sich nur die Reihenfolge der Summanden von  $S$ ;

2<sup>o</sup>) eine überall endliche Funktion von  $z$ ; denn für jedes beliebige  $z = \alpha$  ist  $\lim (z - \alpha) \cdot \sigma = 0$ . Als einwertige, überall endliche Funktion von  $z$  ist daher  $S$  eine Konstante, und zwar  $= 0$ , da für  $z = \infty$  alle  $\sigma_x = 0^2$  werden. — Es ist daher  $C = 0$ , und

$$16^o) \quad \sum_{x=1}^n \sigma_x \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x} = \varphi \left( t^{n-2}, z \right).$$

Betrachtet man weiter, daß in irgend einem Doppelpunkte  $s = \gamma, z = \delta$  von  $s$ , in dem etwa  $s_1 = s_2 = \gamma, s_3 = \gamma_3, \dots$  wird:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n \sigma_x \cdot \frac{F(t, \delta)}{t - s_x} &= \sigma_1 \cdot \frac{\varphi_0 \cdot (t - \gamma)^2 \cdot (t - \gamma_3) \dots (t - \gamma_n)}{t - \gamma} \\ &+ \sigma_2 \cdot \frac{\varphi_0 \cdot (t - \gamma)^2 \cdot (t - \gamma_3) \dots (t - \gamma_n)}{t - \gamma} \\ &+ \sigma_3 \cdot \frac{\varphi_0 \cdot (t - \gamma)^2 \cdot (t - \gamma_3) \dots (t - \gamma_n)}{t - \gamma_3} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

ist, so folgt: die Funktion  $\varphi\left(t^{\frac{n-2}{2}}, z^{\frac{m-2}{2}}\right)$  wird in allen Doppelpunkten  $(\gamma_q, \delta_q)$  ( $q = 1, 2 \dots r$ ) von  $s$  Null zur ersten Ordnung.

— Eine mit  $s$  derart verbundene Funktion  $\varphi\left(s^{\frac{n-2}{2}}, z^{\frac{m-2}{2}}\right)$ , daſs sie in allen Doppelpunkten von  $s$  gleich  $0^1$  wird, heiſst seit Riemann, eine  $\varphi$ -Funktion.

Läſst man  $t = s_1$  werden, so geht  $\frac{F(t, z)}{t - s_1}$  über in  $F'(s_1, z)$ , und man erhält:

$$\sigma_1 \cdot F'(s_1, z) = \varphi(s_1, z).$$

Analog ergibt sich allgemein:

$$\sigma_x \cdot F'(s_x, z) = \varphi(s_x, z) \quad (x = 1, 2 \dots n).$$

Hieraus folgt:  $\sigma \cdot F'(s, z) = \varphi(s, z)$

oder

$$17^0) \quad \sigma = \frac{\varphi\left(s^{\frac{n-2}{2}}, z^{\frac{m-2}{2}}\right)}{F'(s, z)}.$$

Das ist die Riemann'sche Form der Integranden I. Gattung. — Der Zähler  $\varphi$  ist an die Bedingung gebunden, daſs für jeden Doppelpunkt  $s = \gamma_q, z = \delta_q$  ( $q = 1, 2 \dots r$ )

$$II_b^0) \quad \varphi(\gamma_q, \delta_q) = 0$$

ist, und diese Bedingungsgleichungen, in Verbindung mit den angeschriebenen Graden von  $\varphi$  in  $s$  und  $z$  sind umgekehrt auch ausreichend, damit  $\sigma = \frac{\varphi}{F'}$  ein Integrand I. Gattung sei.

Nach Satz III<sup>0</sup>) giebt es bei irreducibeler Grundgleichung  $F = 0$  vom Geschlecht  $p$  stets  $p = (m-1)(n-1) - r$  linear-unabhängige Integranden I. Gattung. Die  $r$  Gleichungen II<sup>0</sup>) zwischen den  $(m-1)(n-1)$  Koeffizienten von  $\varphi$  enthalten also keine überzählige Gleichung, d. h.

**Satz IV<sup>0</sup>)** Ist die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  irreducibel, so ist die Anzahl  $r$  und die Lage der Doppelpunkte  $(\gamma, \delta)$  eine solche, daſs sich unter den  $r$  Gleichungen II<sup>0</sup>) keine überzählige findet.



Hieraus folgt: das Gleichungssystem  $\Pi^0$ ) hat mindestens eine, von Null verschiedene Auflösungsdeterminante von der Ordnung  $r$ .

Bezeichnet man die  $p$  linearunabhängigen Integranden I. Gattung, deren Existenz und Ausdrucksform im Vorigen nachgewiesen wurde, mit  $w'_1, w'_2, \dots, w'_p$ , so läßt sich jeder Integrand I. Gattung  $w'$  darstellen in der Form:

$$18^0) \quad w' = c_1 w'_1 + c_2 w'_2 + \dots + c_p w'_p + \text{konstans},$$

wo die  $c_1 \dots c_p$  konstante Koeffizienten bezeichnen.

Jeder dieser  $p$  linearunabhängigen Integranden I. Gattung liefert ein Integral I. Gattung; das giebt  $p$  linearunabhängige Integrale I. Gattung

$$w_1 = \int w'_1 dz, w_2 = \int w'_2 dz, \dots, w_p = \int w'_p dz,$$

durch welche sich jedes Integral I. Gattung  $w$  ausdrücken läßt in der Form:

$$19^0) \quad w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_p w_p + \text{konstans}.$$

Aus der Linearunabhängigkeit der  $p$  Integrale I. Gattung  $w_1, \dots, w_p$  folgt außerdem:

**Satz V<sup>0</sup>)** Die Gleichung:

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_p w_p = \text{konstans}$$

kann nur erfüllt werden, indem man sämtliche Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  gleich Null setzt.

## § 20. Die Periodizitätsmoduln der Integrale

### I. Gattung.

Jedes Integral I. Gattung  $w$  ist eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T'$  und besitzt an den Querschnitten dieser Fläche konstante Periodizitätsmoduln. Sind  $w_1 \dots w_p$   $p$  linearunabhängige Integrale I. Gattung, und ist

$$\text{an } a_1: w_x \overset{+}{-} w_x = A_{x1},$$

$$,, \quad b_1: w_x \overset{+}{-} w_x = B_{x1}, \quad (x = 1, 2, \dots, p),$$

$$,, \quad c_1: w_x \overset{+}{-} w_x = 0,$$

so hat 
$$w = \sum_{x=1}^p c_x \cdot w_x + \text{konstans}$$

an  $a_\lambda$  den Periodizitätsmodul  $A_\lambda = \sum_{x=1}^p c_x \cdot A_{x\lambda},$

„  $b_\lambda$  „ „  $B_\lambda = \sum_{x=1}^p c_x \cdot B_{x\lambda},$

„  $c_\lambda$  „ „  $C_\lambda = 0.$

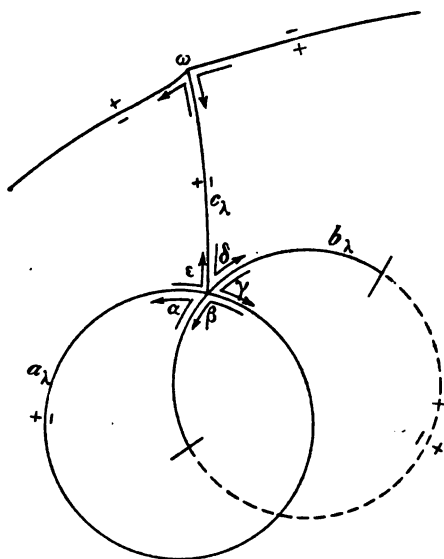


Fig. 34.

Hierin ist (siehe Fig. 34):

$$A_{x\lambda} = \int \left| \begin{array}{c} \gamma \\ b \\ \beta \end{array} \right|_x w'_x \cdot dz$$

$$B_{x\lambda} = \int \left| \begin{array}{c} \alpha \\ a \\ \beta \end{array} \right|_x w'_x \cdot dz.$$

Im Folgenden leiten wir über die Periodizitätsmoduln der Integrale I. Gattung eine Reihe von Sätzen ab, deren Beweis auf der Anwendung des sogenannten Green'schen Satzes beruht.

Bezeichnen  $U$  und  $V$  zwei reelle Funktionen von  $x$  und  $y$ , die ebenso wie ihre Derivierten innerhalb einer zusammenhängenden, von einer oder mehreren geschlossenen Kurven  $C$  begrenzten Fläche  $S$ , eindeutig und stetig sind, so ist bekanntlich nach dem Green'schen Satz\*):

$$1^0) \quad \iint_{(S)} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx \cdot dy = \int_{(C)} (U \cdot dx + V dy),$$

wo die Integration links sich über sämtliche Flächenelemente von  $S$ , die Integration rechts in positiver Richtung über sämtliche Randkurven  $C$  von  $S$  erstreckt.

Es sei nun

$$f(z) = X + iY$$

eine innerhalb  $S$  und auf ihrem Rande  $C$  eindeutige und stetige Funktion von  $z = x + iy$ , so daß Gleiches auch von ihren Derivierten gilt.

Setzt man in 1<sup>0</sup>)

$$U = X \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad V = X \frac{\partial Y}{\partial y},$$

so erhält man:

$$\iint_{(S)} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} \right\} dx \cdot dy = \int_{(C)} X \cdot dY,$$

oder, da

$$2^0) \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

ist:

$$3^0) \quad \iint_{(S)} \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \cdot dy = \int_{(C)} X \cdot dY.$$

---

\*) Siehe etwa: Durège, Elemente der Theorie der Funktionen, oder Neumann: Abel'sche Integrale, pag. 8 und 26.

Die einzelnen Elemente des Integrals links sind positiv, also auch das ganze Integral. Dieses kann nur dann Null werden, wenn jedes Element Null ist, d. h. wenn überall in  $S$

$$\frac{\partial X}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial X}{\partial y}$$

Null sind. Zuzufolge 2<sup>o</sup>) müssen dann aber auch

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial Y}{\partial y}$$

überall in  $S$  gleich Null sein. Dies liefert den

**Hilfssatz:** Ist  $f(z) = X + iY$  auf einer Fläche  $S$  eindeutig und stetig, so hat das Integral

$$\int_{(C)} X \cdot dY,$$

in positiver Richtung über den Rand  $C$  von  $S$  erstreckt, einen Wert, der stets positiv ist und nur dann Null wird, wenn  $f(z)$  innerhalb  $S$  überall denselben konstanten Wert hat.

Die einfach zusammenhängende Fläche  $T'$  hat, wie der vorige Hilfssatz es von  $S$  verlangt, eine geschlossene Randkurve, und in  $T'$  ist das Integral I. Gattung  $w$  eindeutig und stetig. Auf  $T'$  und  $w$  läßt sich also dieser Hilfssatz anwenden. Ist daher, nach Zerlegung in seinen reellen und seinen imaginären Bestandteil:

$$4^o) \quad w = u + iv,$$

so folgt: das Integral  $\int_{(T')} u \cdot dv$  ist stets positiv und nur dann Null, wenn  $w$  sich auf eine Konstante reduziert.

Dieses Randintegral  $\int_{(T')} u dv$  läßt sich durch die Periodizitätsmoduln von  $w$  in  $T'$  ausdrücken.

Bedeuteten allgemein  $P, Q$  Funktionen, die, welches auch ihr Verhalten im Innern von  $T'$  sei, an den Querschnitten  $a_i, b_i$  konstante Periodizitätsmoduln haben, so zwar, daß

$$\begin{aligned} \text{an } a_1: \overset{+}{P} - \bar{P} &= \alpha_1, \quad \overset{+}{Q} - \bar{Q} = \alpha'_1, \\ \text{,, } b_1: \overset{+}{P} - \bar{P} &= \beta_1, \quad \overset{+}{Q} - \bar{Q} = \beta'_1, \\ \text{,, } c_1: \overset{+}{P} - \bar{P} &= 0, \quad \overset{+}{Q} - \bar{Q} = 0, \end{aligned}$$

sei, so ist (Fig. 34)

$$\int_{(T)} P \cdot dQ = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \int \left| \frac{\alpha}{a} \right|_{\lambda} (\overset{+}{P} \cdot d\overset{+}{Q} - \bar{P} \cdot d\bar{Q}) + \int \left| \frac{\gamma}{b} \right|_{\lambda} (\bar{P} \cdot d\bar{Q} - \overset{+}{P} \cdot d\overset{+}{Q}) + \int \left| \frac{\delta}{c} \right|_{\lambda} (\bar{P} \cdot d\bar{Q} - \overset{+}{P} \cdot d\overset{+}{Q}) \right\}$$

Da an allen Querschnitten  $d\overset{+}{Q} = d\bar{Q}$  ist, so erhalten wir, wenn wir dafür kurz  $dQ$  schreiben:

$$\int_{(T)} P \cdot dQ = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \int \left| \frac{\alpha}{a} \right|_{\lambda} (\overset{+}{P} - \bar{P}) dQ - \int \left| \frac{\gamma}{b} \right|_{\lambda} (\overset{+}{P} - \bar{P}) dQ - \int \left| \frac{\delta}{c} \right|_{\lambda} (\overset{+}{P} - \bar{P}) dQ \right\},$$

und zufolge der Periodizitätseigenschaften von  $P$ :

$$\int_{(T)} P \cdot dQ = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \alpha_{\lambda} \cdot \int \left| \frac{\alpha}{a} \right|_{\lambda} dQ - \beta_{\lambda} \cdot \int \left| \frac{\gamma}{b} \right|_{\lambda} dQ \right\}.$$

Berücksichtigt man schliesslich, daß

$$\beta'_{\lambda} = \int \left| \frac{\alpha}{a} \right|_{\lambda} dQ, \quad \alpha'_{\lambda} = \int \left| \frac{\gamma}{b} \right|_{\lambda} dQ$$

ist, so ergibt sich das Resultat:

$$5^0) \quad \int_{(T)} P \cdot dQ = \sum_{\lambda=1}^p (\alpha_{\lambda} \cdot \beta'_{\lambda} - \alpha'_{\lambda} \beta_{\lambda}).$$

Wendet man dies an auf das Integral I. Gattung  $w = u + iv$  mit den Periodizitätseigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{an } a_1: w - \overline{w} &= A_1 = \alpha_1 + i\alpha'_1, \\ „ \quad b_1: w - \overline{w} &= B_1 = \beta_1 + i\beta'_1, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$6^0) \quad \int_{(T)} u dv = \sum_{i=1}^p (\alpha_i \cdot \beta'_i - \alpha'_i \cdot \beta_i),$$

und der obige Hilfssatz liefert den

**Satz 1<sup>o</sup>)** Besitzt das Integral I. Gattung  $w$   
an  $a_1$  den Periodizitätsmodul:  $A_1 = \alpha_1 + i\alpha'_1$ ,  
„  $b_1$  „ „ „ :  $B_1 = \beta_1 + i\beta'_1$ ,  
so ist die Summe

$$\sum_{i=1}^p (\alpha_i \cdot \beta'_i - \alpha'_i \cdot \beta_i)$$

stets positiv und wird nur dann Null, wenn  $w$  sich auf eine Konstante reduziert.

Bemerkung: Bildet man  $T'$  mit Hilfe von  $w = u + iv$  auf eine  $w$ -Ebene ab mit der Abscissenachse  $u$  und der Ordinatenachse  $v$ , so liefert  $\int_{(T')} u dv$  oder  $\sum_i (\alpha_i \beta'_i - \alpha'_i \cdot \beta_i)$  den Flächeninhalt des Bildes von  $T'$ .

Aus Satz 1<sup>o</sup>) ergibt sich eine Reihe von Folgerungen.

Die Summe  $\sum_i (\alpha_i \beta'_i - \alpha'_i \beta_i)$  wird Null u. a.:

1<sup>o</sup>) wenn alle  $\alpha_i$  und alle  $\alpha'_i$ , also auch alle  $A_i$  gleich Null sind;

2<sup>o</sup>) wenn alle  $\beta_i$  und alle  $\beta'_i$ , also auch alle  $B_i$  gleich Null sind;

3<sup>o</sup>) wenn für  $p$  Werte von  $i$  entweder  $\alpha_i = \alpha'_i = 0$  oder  $\beta_i = \beta'_i = 0$  ist;

4<sup>o</sup>) wenn alle  $\alpha_i$  und alle  $\beta_i$  gleich Null sind,  $w$  also nur rein imaginäre Periodizitätsmoduln besitzt;

5°) wenn alle  $\alpha'_i$  und alle  $\beta'_i$  gleich Null sind, und  $w$  daher nur reelle Periodizitätsmoduln besitzt;

6°) wenn an einigen Querschnitten  $\alpha_i = \beta_i = 0$ , und an allen andern  $\alpha'_i = \beta'_i = 0$  ist.

Auf Grund von Satz I°) folgt hieraus unter anderm:

**Folgerung I°):** Besitzt ein Integral I. Gattung  $w$  an  $p$  von den  $2p$  Querschnitten  $a_i, b_i$  Periodizitätsmoduln, die  $= 0$  sind, so reduziert  $w$  sich auf eine Konstante.

**Folgerung II°):** Sind die Periodizitätsmoduln eines Integrals I. Gattung  $w$  entweder alle rein reell, oder alle rein imaginär, so reduziert  $w$  sich auf eine Konstante.

Wendet man diese Folgerungen auf den Fall  $p = 1$  an, so erhält man bekannte Resultate. — Alle Integrale I. Gattung lassen sich in diesem Falle durch eines derselben,  $w$ , ausdrücken, und dieses hat nur zwei Periodizitätsmoduln  $A$  und  $B$ .

Aus Folgerung I°) ergibt sich dann: weder  $A$  noch  $B$  darf Null sein.

Aus Folgerung II°) ergibt sich: das Verhältnis  $\frac{A}{B}$  darf nicht reell sein; denn sonst würde  $\frac{w}{A}$  ein Integral I. Gattung sein, von dessen Periodizitätsmoduln der eine  $= 1$  und der andere ebenfalls reell wäre, was bei nicht konstantem  $w$  unmöglich ist. Das Verhältnis  $\frac{A}{B}$  muss also eine komplexe Konstante sein, von der zwar der reelle, nicht aber der imaginäre Bestandteil verschwinden darf.

Aus Folgerung I°) ergibt sich ferner:

**Satz II°)** Ein Integral I. Gattung  $w$  ist, bis auf eine additive Konstante, vollständig bestimmt, wenn  $p$  Periodizitätsmoduln desselben an irgend  $p$  von den  $2p$  Querschnitten  $a_i, b_i$  gegeben sind, vorausgesetzt, dass diese  $p$  Periodizitätsmoduln nicht alle Null sind.

Beweis: Haben zwei Integrale I. Gattung  $w$  und  $W$  an denselben  $p$  Querschnitten dieselben Periodizitätsmoduln, so ist die Differenz  $w - W$  ein Integral I. Gattung, das sich nach Folgerung I<sup>o</sup>) auf eine Konstante reduziert.  $w$  und  $W$  können sich daher nur um eine konstante GröÙe unterscheiden.

Ebenso erhält man aus Folgerung II<sup>o</sup>):

**Satz III<sup>o</sup>)** Ein Integral I. Gattung  $w$  ist, bis auf eine additive Konstante, vollständig bestimmt, wenn die  $2p$  reellen oder die  $2p$  rein imaginären Bestandteile seiner sämtlichen Periodizitätsmoduln an allen  $2p$  Querschnitten  $a_k, b_k$  gegeben sind.

Die Sätze II<sup>o</sup>) und III<sup>o</sup>) zeigen, daß die  $2p$  Periodizitätsmoduln eines Integrales I. Gattung nicht von einander unabhängig sind. Aber auch zwischen den Periodizitätsmoduln je zweier Integrale I. Gattung  $W_1, W_2$  besteht eine Beziehung, die wir ableiten wollen.

Bildet man das Integral

$$\int_{(T)} W_1 \cdot dW_2$$

in positiver Richtung über den Rand von  $T'$  erstreckt, so ist nach Gleichung 5<sup>o</sup>):

$$\int_{(T)} W_1 \cdot dW_2 = \sum_{k=1}^p (A_{1k} B_{2k} - A_{2k} B_{1k}),$$

wenn  $A_{1k}, B_{2k}$  die Periodizitätsmoduln von  $W_1, A_{2k}, B_{1k}$  die von  $W_2$  an  $a_k, b_k$  bezeichnen. Andererseits ist aber auch nach einem Satze von Cauchy:

$$\int_{(T)} W_1 \cdot dW_2 = 2\pi i \text{ mal der Summe der Residuen von}$$

$$W_1 \cdot \frac{dW_2}{dz} \text{ in } T',$$

und diese Residuensumme ist Null, da  $W_1 \cdot \frac{dW_2}{dz}$  in  $T'$  überhaupt kein von Null verschiedenes Residuum besitzt. — Wir haben so den





$$8^0) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{p1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1p} & A_{2p} & \dots & A_{pp} \end{vmatrix}$$

des Systems von Null verschieden ist. Dies giebt den wichtigen

**Satz V<sup>0</sup>)** Die Determinante  $\Delta$  der Periodizitätsmoduln von  $p$  linearunabhängigen Integralen I. Gattung an  $p$  beliebigen der  $2p$  Querschnitte  $a_\lambda, b_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2 \dots p$ ) ist stets verschieden von Null.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar, daß wir die Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  so bestimmen können, daß das Integral

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_p w_p + \text{konstans}$$

an  $p$  willkürlich gewählten Querschnitten  $a_\lambda$  oder  $b_\lambda$  vorgeschriebene Periodizitätsmoduln erhält, nur dürfen, wenn  $w$  sich nicht auf eine Konstante reduzieren soll, diese  $p$  Periodizitätsmoduln nicht alle  $= 0$  sein. Ist so über die  $c_1 \dots c_p$  Verfügung getroffen, so ist, in Übereinstimmung mit Satz II<sup>0</sup>) dieses Paragraphen,  $w$  bis auf eine additive Konstante bestimmt; namentlich sind auch die übrigen  $p$  Periodizitätsmoduln von  $w$  bestimmt.

Dieser Satz läßt sich umkehren. Wir gehen jedoch hierauf nicht ein, wollen vielmehr hier noch mit kurzen Worten auf den Zusammenhang hinweisen, der zwischen der gegenwärtigen Theorie und der Theorie der periodischen Funktionen besteht.

Es seien

$$w_1, w_2, \dots, w_p$$

$p$  linearunabhängige Integrale I. Gattung, deren Periodizitätsmoduln durch das Schema:

|         | $a_1$       | $a_2$       | $\dots$ | $a_\lambda$       | $\dots$ | $a_p$       | $b_1$       | $b_2$       | $\dots$ | $b_\lambda$       | $\dots$ | $b_p$       |
|---------|-------------|-------------|---------|-------------------|---------|-------------|-------------|-------------|---------|-------------------|---------|-------------|
| $w_1$   | $A_{11}$    | $A_{12}$    | $\dots$ | $A_{1\lambda}$    | $\dots$ | $A_{1p}$    | $B_{11}$    | $B_{12}$    | $\dots$ | $B_{1\lambda}$    | $\dots$ | $B_{1p}$    |
| $w_2$   | $A_{21}$    | $A_{22}$    | $\dots$ | $A_{2\lambda}$    | $\dots$ | $A_{2p}$    | $B_{21}$    | $B_{22}$    | $\dots$ | $B_{2\lambda}$    | $\dots$ | $B_{2p}$    |
| $\dots$ | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$           | $\dots$ | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$           | $\dots$ | $\dots$     |
| $w_\mu$ | $A_{\mu 1}$ | $A_{\mu 2}$ | $\dots$ | $A_{\mu \lambda}$ | $\dots$ | $A_{\mu p}$ | $B_{\mu 1}$ | $B_{\mu 2}$ | $\dots$ | $B_{\mu \lambda}$ | $\dots$ | $B_{\mu p}$ |
| $\dots$ | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$           | $\dots$ | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$           | $\dots$ | $\dots$     |
| $w_p$   | $A_{p1}$    | $A_{p2}$    | $\dots$ | $A_{p\lambda}$    | $\dots$ | $A_{pp}$    | $B_{p1}$    | $B_{p2}$    | $\dots$ | $B_{p\lambda}$    | $\dots$ | $B_{pp}$    |

9<sup>0</sup>)

gegeben seien. Das System der mit den  $2p$  ganzen Zahlen  $g_1 \dots g_p, h_1 \dots h_p$  gebildeten  $p$  Ausdrücke:

$$10^\circ) (gh)_\mu = \sum_{\lambda=1}^p (g_\lambda A_{\mu\lambda} + h_\lambda B_{\mu\lambda}), \quad (\mu = 1, 2 \dots p)$$

heißt dann ein System von zusammengehörigen oder simultanen Periodizitätsmoduln der  $p$  Integrale  $w_1 \dots w_p$ , weil diese Integrale  $w_\mu$ , wenn man sie längs desselben Integrationsweges zwischen denselben unteren und oberen Grenzen erstreckt denkt und als Funktionen ihrer oberen Grenze auffaßt, sich (siehe § 18) gleichzeitig um Ausdrücke von der Form  $10^\circ)$  ändern, wenn man ihren Integrationswegen gleiche Änderungen erteilt.

Angenommen nun, es sei gelungen, eine Funktion

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_p)$$

von  $p$  unabhängigen Variablen  $x_1 \dots x_p$  herzustellen, welche die Eigenschaft hat:

- 1<sup>o</sup>) eine einwertige Funktion von  $x_1 \dots x_p$  zu sein, und
- 2<sup>o</sup>) periodisch zu sein gemäß der Gleichung:

$$11^\circ) \varphi[x_1 + (gh)_1, x_2 + (gh)_2, \dots x_p + (gh)_p] = \varphi(x_1, x_2 \dots x_p).$$

Die Funktion  $\varphi$  ist dann  $2p$ -fach periodische Funktion von  $x_1 \dots x_p$ , und ihre Perioden sind die  $2p$  Periodizitätsmoduln von  $w_1 \dots w_p$ , wie man sogleich sieht, wenn man in  $11^\circ)$  von den  $2p$  ganzen Zahlen  $g_1 \dots g_p, h_1 \dots h_p$  der Reihe eine gleich 1 und alle übrigen gleich 0 annimmt. — Daß es solche Funktionen  $\varphi$  giebt, folgt aus der Theorie der höheren  $\mathfrak{F}$ -Funktionen; daß einwertige Funktionen von  $p$  unabhängigen Variablen höchstens  $2p$ -fach periodisch sein können, hat zuerst Hermite (1843), später Riemann bewiesen.

Denkt man sich nun in  $\varphi$  an Stelle von  $x_1 \dots x_p$  die linearunabhängigen Integrale  $w_1 \dots w_p$  eingesetzt, so erhält man aus  $11^\circ)$ :

$$12^\circ) \quad \varphi[w_1 + (gh)_1, \dots w_p + (gh)_p] = \varphi(w_1, \dots w_p).$$

Als einwertige Funktion der in  $T'$  eindeutigen Integrale  $w_1 \dots w_p$  ist  $\varphi(w_1 \dots w_p)$  in  $T'$  eindeutig; die Gleichung  $12^\circ)$

sagt aber weiter aus, daß  $\varphi(w_1 \dots w_p)$  auch in  $T$  eindeutig ist, wofern der Integrationsweg in  $T$  für alle  $p$  Integrale der nämliche ist. Dies giebt den

**Satz VI<sup>o</sup>)** Eine einwertige Funktion von  $p$  unabhängigen Variabeln, die  $2p$ -fach periodisch ist, und deren  $2p$  Periodensysteme die Systeme

$$\begin{aligned} A_{1\lambda}, A_{2\lambda}, \dots A_{p\lambda}, \\ B_{1\lambda}, B_{2\lambda}, \dots B_{p\lambda}. \end{aligned} \quad (\lambda = 1, 2 \dots p)$$

der Periodizitätsmoduln von  $p$  linear unabhängigen Integralen  $w_1 \dots w_p$  sind, verwandelt sich in eine wie  $T$  verzweigte Funktion von  $z$ , wenn man an Stelle der ursprünglichen Variabeln diese  $p$  Integrale I. Gattung setzt.

Über eine Umkehrung dieses Satzes siehe: Theta-funktionen u. hyperelliptische Funktionen § 9, Satz I<sup>o</sup>).

## § 21. Die $p$ Normalintegrale I. Gattung.

Wie schon im vorigen Paragraphen bemerkt wurde, können wir durch geeignete Verfügung über die Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  jedem Integrale I. Gattung

$$1^o) \quad w = c_1 w_1 + \dots + c_p w_p + \text{konst.}$$

$p$  Periodizitätsmoduln nach Belieben vorschreiben, nur dürfen diese Moduln nicht alle gleich 0 sein. Diese Möglichkeit benutzen wir, um Integrale I. Gattung mit möglichst einfachen Periodizitätseigenschaften herzustellen.

Wir bilden  $p$  Integrale I. Gattung:

$$2^o) \quad u_1, \dots u_\mu, \dots u_p,$$

indem wir die Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  so bestimmen, daß  $u_\mu$  ( $\mu = 1, \dots p$ ) an allen Querschnitten  $a_\lambda$  ( $\lambda \neq \mu$ ) den Periodizitätsmodul 0, an  $a_\mu$  aber den Modul  $\pi i$  hat. Die  $p$  so erhaltenen Integrale I. Gattung  $u_1 \dots u_p$  heißen die  $p$  Normalintegrale I. Gattung. Bezeichnen wir allgemein den Periodizitätsmodul von  $u_\mu$  an  $b_\lambda$  mit  $a_{\mu\lambda}$ , so wird das

$$3^0) \quad \begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & \dots & a_\mu & \dots & a_p \\ \hline u_1 & \pi i & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ u_2 & 0 & \pi i & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_\mu & 0 & 0 & \dots & \pi i & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \pi i \end{array} \quad \begin{array}{c|cccccc} & b_1 & b_2 & \dots & b_\mu & \dots & b_p \\ \hline & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} & \dots & a_{1p} \\ & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mu} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} & \dots & a_{\mu p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{p\mu} & \dots & a_{pp} \end{array}$$
[illegible]
$$4^0) \quad u_\mu = \frac{\pi i}{A} (A_{1\mu} w_1 + A_{2\mu} w_2 + \dots + A_{p\mu} w_p) + \text{konst.}$$

für  $\mu = 1, 2 \dots p.$

Es gilt ferner der

**Satz I<sup>o</sup>)** Die  $p$  Normalintegrale I. Gattung  $u_1 \dots u_p$  sind linearunabhängig.

Beweis: Bestünde zwischen  $\mu_1 \dots \mu_p$  eine Beziehung von der Form

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_p u_p = \text{konst.},$$

wo die Koeffizienten  $C_1 \dots C_p$  nicht alle gleich Null sind, so

hätte  $\sum_{\lambda=1}^p C_\lambda u_\lambda$  am Querschnitt  $a_\varrho (\varrho=1, \dots, p)$  den Periodizitätsmodul Null; dieser Modul ist aber andererseits  $= C_\varrho \cdot \pi i$ . Es müßten also alle Koeffizienten  $C_\varrho (\varrho=1 \dots p)$  gleich Null sein. Die Annahme, die Integrale  $u_1 \dots u_p$  seien nicht linearunabhängig, schließt daher einen Widerspruch in sich.

Aus 4<sup>o</sup>) folgt weiter:

$$5^o) \quad a_{\mu\lambda} = \frac{\pi i}{A} (A_{1\mu} \cdot B_{1\lambda} + A_{2\mu} \cdot B_{2\lambda} + \dots + A_{p\mu} \cdot B_{p\lambda}),$$

und durch Vertauschung von  $\mu$  und  $\lambda$ :

$$5^{o'}) \quad a_{\lambda\mu} = \frac{\pi i}{A} (A_{1\lambda} \cdot B_{1\mu} + A_{2\lambda} \cdot B_{2\mu} + \dots + A_{p\lambda} \cdot B_{p\mu}),$$

wo die Klammerausdrücke sich, wie leicht ersichtlich, auch in Determinantenform schreiben lassen. — Für diese Periodizitätsmoduln gilt der

**Satz II<sup>o</sup>)** Es ist:

$$6^o) \quad a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}.$$

Beweis: Nach Satz IV<sup>o</sup>), § 20 besteht zwischen den Periodizitätsmoduln zweier Integrale I. Gattung  $W_1$  und  $W_2$  die bilineare Beziehung:

$$\sum_{\lambda=1}^p (A_{1\lambda} B_{2\lambda} - A_{2\lambda} B_{1\lambda}) = 0.$$

Nimmt man für  $W_1$  und  $W_2$  die zwei Normalintegrale  $u_\mu$  und  $u_\lambda$ , so reduziert sich

$$\sum_{\lambda=1}^p A_{1\lambda} B_{2\lambda} \text{ auf } \pi i \cdot a_{\lambda\mu},$$

und

$$\sum_{\lambda=1}^p A_{2\lambda} B_{1\lambda} \text{ auf } \pi i \cdot a_{\mu\lambda}.$$

Die obige Beziehung lautet also jetzt:

$$\pi i (a_{\lambda\mu} - a_{\mu\lambda}) = 0,$$

oder

$$a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu},$$

w. z. b. w.

Um eine weitere wichtige Eigenschaft der Periodizitätsmoduln der  $p$  Normalintegrale  $u_1 \dots u_p$  abzuleiten, bilden wir das Integral I. Gattung:

$$w = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_p u_p,$$

worin  $c_1 \dots c_p$  reelle Größen seien. Bezeichnen, in ihre reellen und imaginären Bestandteile zerlegt,

$$\alpha_\lambda + i\alpha'_\lambda, \quad \beta_\lambda + i\beta'_\lambda,$$

die Periodizitätsmoduln von  $w$  an  $a_\lambda, b_\lambda$ , so ist

$$\alpha_\lambda + i\alpha'_\lambda = c_\lambda \cdot \pi i, \quad \text{d. h. } \alpha_\lambda = 0, \quad \alpha'_\lambda = \pi \cdot c_\lambda,$$

$$\beta_\lambda + i\beta'_\lambda = \sum_{\mu=1}^p c_\mu a_{\mu\lambda}.$$

Bildet man mit diesen Periodizitätsmoduln die Summe:

$$\sum_{\lambda=1}^p (\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \beta_\lambda),$$

so reduziert sich dieselbe auf:

$$- \pi \cdot \sum_{\lambda=1}^p c_\lambda \cdot \beta_\lambda$$

oder, wenn wir mit  $\alpha_{\mu\lambda}$  den reellen Teil von  $a_{\mu\lambda}$  bezeichnen, auf

$$7^0) \quad - \pi \cdot \sum_{\lambda=1}^p \sum_{\mu=1}^p \alpha_{\mu\lambda} \cdot c_\lambda \cdot c_\mu.$$

Nach Satz I<sup>0</sup>), § 20 ist aber  $\sum_{\lambda} (\alpha_\lambda \beta'_\lambda - \alpha'_\lambda \beta_\lambda)$  stets positiv und nur dann Null, wenn  $w$  sich auf eine Konstante reduziert. Die Doppelsumme

$$S = \sum_{\lambda=1}^p \sum_{\mu=1}^p \alpha_{\mu\lambda} c_\lambda c_\mu$$

ist also stets negativ und wird nur dann Null, wenn alle Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  Null sind. Als Funktion von  $c_1 \dots c_p$  aufgefaßt, ist  $S$  eine reelle quadratische Form dieser Koeffizienten, und zwar, da sie nur dann Null wird, wenn alle Variablen  $c_1 \dots c_p$  Null werden, eine vollständige Form. — Wir haben so den für später sehr wichtigen

**Satz III<sup>o</sup>)** Bezeichnet  $a_{\mu\lambda}$  den Periodizitätsmodul von  $u_\mu$  an  $b_\lambda$ , und bedeuten  $c_1 \dots c_p$  reelle Größen, so ist der reelle Teil von

$$\sum_{\lambda=1}^p \sum_{\mu=1}^p a_{\mu\lambda} c_\lambda c_\mu$$

eine vollständige negative quadratische Form der  $p$  reellen Variablen  $c_1 \dots c_p$ .

Dieser Satz wird später bei der Frage nach der Konvergenz der Riemann'schen Thetareihe ausschlaggebend sein.

Die im Vorigen eingeführten Normalintegrale I. Gattung  $u_1 \dots u_p$  enthalten jedes noch eine verfügbare Konstante. In späteren Untersuchungen werden wir öfters zur Vereinfachung der Resultate über die in jedem Normalintegrale  $u_\mu$  enthaltene Konstante so verfügen, daß die  $n$  Werte, die  $u_\mu$  in den  $n$  unendlich fernen Punkten von  $T$  annimmt, die Null zur Summe haben. Die Normalintegrale sind dann vollständig bestimmt; wir nennen sie mit Christoffel die definitiv normierten Integrale I. Gattung.

Das System der Normalintegrale  $u_1 \dots u_p$  ist nicht das einzige, das sich zu einer gegebenen Fläche  $T'$  konstruieren läßt. Ordnet man die erste Determinante der Periodizitätsmodulen des Schemas 3<sup>o</sup>) nicht den  $p$  Querschnitten  $a_\lambda$ , sondern beliebigen  $p$  Querschnitten aus der Reihe  $a_\lambda, b_\lambda$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) zu, so erhält man bei fest angenommener Lage der  $2p$  Querschnitte  $a_\lambda, b_\lambda$  im ganzen:

$$(2p)_p = \frac{2p(2p-1)\dots(p+1)}{1.2.3\dots p}$$

Systeme von je  $p$  Normalintegralen I. Gattung. Außerdem aber läßt sich das System der  $2p$  Querschnitte  $a_\lambda, b_\lambda$  auf  $\infty$ -viele Arten durch ein anderes äquivalentes ersetzen, das  $T$  ebenfalls in eine einfach zusammenhängende Fläche



$T'$  verwandelt; zu jedem dieser Querschnittssysteme gehört dieselbe endliche Anzahl  $(2p)_p$  von Systemen von Normalintegralen I. Gattung und also auch von Periodizitätsmodulen  $a_{\mu\lambda}$ . Die Theorie der linearen Transformation (oder auch der unendlich vielen Formen) der Thetafunktion gründet sich auf das eingehendere Studium des Zusammenhangs zwischen den zu zwei verschiedenen kanonischen Querschnittssystemen gehörigen Normalintegralen I. Gattung und Periodizitätsmodulen  $a_{\mu\lambda}$ .

## § 22. Das Christoffel'sche Integral $P(o, \epsilon)$ .\*

Außer den Normalintegralen I. Gattung, deren Existenz und Konstruktion wir in den letzten drei Paragraphen nachgewiesen haben, sind die einfachsten Integralfunktionen diejenigen, die wir als Integrale II. und III. Gattung früher definiert haben. Um zu ihnen zu gelangen, konstruieren wir zunächst ein von Christoffel in die Theorie der Abel'schen Funktionen eingeführtes Integral der Klasse mit speziellen Unstetigkeitseigenschaften; aus demselben ergeben sich, wie wir später sehen werden, auf sehr einfache Weise die sogenannten Normalintegrale II. und III. Gattung. — Wir stellen uns folgende

**Aufgabe:** Eine Funktion  $\tau$  der Klasse so zu bestimmen, daß ihr Integral  $J = \int \tau dz$  in  $T$  überhaupt nicht algebraisch unstetig wird und logarithmische Unstetigkeiten nur besitzt in einem im Endlichen gelegenen Punkte  $\epsilon (s = \sigma, z = \zeta)$  und in den  $n$  unendlich fernen Punkten von  $T$ , so zwar, daß

in  $\epsilon(\sigma, \zeta)$ :  $J = G \cdot \log(z - \zeta) + \text{functio continua}$ ,  
in  $\infty_x (x = 1 \dots n)$ :  $J = H \cdot \log z + \text{functio continua}$  ist.

Soll  $J$  diese Eigenschaften besitzen, so muß der Integrand  $\tau$  folgende Bedingungen erfüllen:

\*) Die Ausführungen dieses Paragraphen schließen sich eng an eine Vorlesung von Christoffel über Abel'sche Funktionen an. Siehe außerdem: Christoffel, Brioschi's Annalen. Ser. 2. t. X, 1880.

1<sup>o</sup>) im Endlichen muß

$$\text{in } \varepsilon: \quad \tau = \frac{G}{z - \zeta} + \text{funct. cont.},$$

und für jeden andern Punkt  $z = \alpha$ :  $\lim (z - \alpha) \tau = 0$  sein.

2<sup>o</sup>) in  $\infty_x$  ( $x = 1, \dots, n$ ) muß

$$\tau = \frac{H}{z} + \frac{\gamma_x}{z^2} + \frac{\gamma'_x}{z^3} + \dots \text{ sein.}$$

Dazu kommt noch nach Satz IV<sup>o</sup>), § 12, die Bedingung

$$3^o) \quad G = n H.$$

Im Folgenden nehmen wir  $G = 1$  an; nach 3<sup>o</sup>) muß dann  $H = \frac{1}{n}$  sein.

Zur Lösung unserer Aufgabe bilden wir nun den Ausdruck:

$$1^o) \quad \psi(t, z) = \sum_{x=1}^n t_x \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x},$$

worin  $t$  einen beliebigen, fest angenommenen Parameter bedeutet, während  $s_1 \dots s_x \dots s_n$  die einem beliebigen  $z$  entsprechenden Werte von  $s$  und  $\tau_1 \dots \tau_x \dots \tau_n$  die gleichzeitigen Werte von  $\tau$  bezeichnen.

Da  $F(t, z) = \varphi_0(t - s_1)(t - s_2) \dots (t - s_n)$  ist, so ergibt sich unmittelbar, daß

$$A^o) \quad \psi(s_\mu, z) = \tau_\mu \cdot F''(s_\mu, z), \quad \text{für } \mu = 1, 2 \dots n$$

$$\text{oder} \quad \psi(s, z) = \tau \cdot F'(s, z) \quad \text{ist.}$$

Der Ausdruck  $\psi(t, z)$  liefert uns also, nachdem wir ihn auf Grund der von  $\tau$  zu erfüllenden Bedingungen ausgearbeitet haben, eine Darstellungsform für  $\tau$ . — Wir untersuchen  $\psi(t, z)$ , unter Berücksichtigung der für  $\tau$  aufgestellten Bedingungen, als Funktion von  $t$  und als Funktion von  $z$ .

$\alpha^o)$   $\psi(t, z)$  als Funktion von  $t$ .

Aus  $F(t, z) = \varphi_0 \cdot (t - s_1) \dots (t - s_n)$  folgt, daß in jedem Summanden von  $\psi(t, z)$  der Faktor  $\frac{F(t, z)}{t - s_x}$  eine ganze

Funktion von  $t$  vom Grade  $n-1$  ist; dasselbe gilt also auch von  $\psi(t, z)$ , so daß wir schreiben können:

$$a^0) \quad \psi(t, z) = V \cdot t^{n-1} + V_1 t^{n-2} + \dots + V_{n-1},$$

wo die Koeffizienten  $V, \dots, V_{n-1}$  nur noch Funktionen von  $z$  sind. Der erste Koeffizient  $V$  dieser Entwicklung läßt sich folgenderweise bestimmen.

Aus

$$V t^{n-1} + \dots + V_{n-1} = \sum_{x=1}^n \tau_x \cdot \frac{\varphi_0(z) \cdot (t-s_1) \dots (t-s_n)}{t-s_x}$$

folgt zunächst

$$V = \varphi_0(z) \cdot \sum_{x=1}^n \tau_x = \varphi_0(z) \cdot S.$$

Die Summe  $S = \sum_{x=1}^n \tau_x$  ist:

1) einwertige Funktion von  $z$ , denn ihre Summanden vertauschen nur ihre Reihenfolge; wenn  $z$  in der komplexen Zahlenebene einen Ringweg beschreibt;

2) sie wird im Endlichen nur unstetig im Punkte  $\epsilon$ , und zwar ist für  $z = \zeta$ ,  $\epsilon = \sigma$ :

$$S = \frac{1}{z-\zeta} + \text{functio cont.} = \frac{1}{z-\zeta} + S_1,$$

wo  $S_1$ , ebenso wie  $S$ , einwertige Funktion von  $z$  ist, die aber im Endlichen nie unstetig wird, also eine ganze Funktion von  $z$  ist.

Nun ist für  $z = \infty$ :

$$\tau_x = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\gamma_x}{z^2} + \frac{\gamma'_x}{z^3} + \dots,$$

$$\text{und daher} \quad S = \frac{1}{z} + \frac{\Sigma \gamma_x}{z^2} + \frac{\Sigma \gamma'_x}{z^3} + \dots,$$

$$S_1 = \frac{1}{z} + \frac{\Sigma \gamma_x}{z^2} + \frac{\Sigma \gamma'_x}{z^3} + \dots - \frac{1}{z-\zeta},$$

oder, wenn man  $\frac{1}{z-\zeta}$  nach Potenzen von  $z$  entwickelt:

$$S_1 = \frac{\Sigma \gamma_x - \zeta}{z^2} + \frac{\Sigma \gamma'_x - \zeta^2}{z^3} + \dots;$$

$S_1$  verschwindet also für  $z = \infty$ . Als ganze, nirgends un-  
stetige Funktion von  $z$  ist daher  $S_1$  eine Konstante, und  
zwar  $= 0$ , da sie im Unendlichen verschwindet. Hieraus

$$\text{folgt} \quad S = \frac{1}{z - \zeta},$$

und

$$b^0) \quad V = \frac{\varphi_0(z)}{z - \zeta}.$$

$\beta^0)$   $\psi(t, z)$  als Funktion von  $z$ :

Als Funktion von  $z$  ist  $\psi(t, z)$ :

1<sup>o</sup>) einwertig; beschreibt nämlich  $z$  in der komplexen  
Zahlenebene einen Ringweg, so bilden die Endwerte der  $s_x$   
eine Permutation der Anfangswerte, und die Endwerte der  
 $\tau_x$  dieselbe Permutation ihrer Anfangswerte; ein solcher  
Ringweg führt also  $\psi(t, z)$  zu seinem Anfangswerte zurück.

2<sup>o</sup>) rational; die  $n$  Summanden

$$\tau_x \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x}$$

sind algebraische Funktionen von  $z$ , werden also nur in  
einer endlichen Anzahl von Punkten und nur zu endlicher  
Ordnung  $\infty$ ; als einwertige Funktion von  $z$  ist daher  $\psi(t, z)$   
rational in  $z$ .

Um  $\psi$  weiter ausarbeiten zu können, ziehen wir die  
für  $\tau$  vorgeschriebenen Unstetigkeitsstellen in Betracht.

Liegt der Punkt  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  im Blatte  $E_v$  von  $T$ , so ist  
nach den Forderungen unserer Aufgabe:

$$\text{in } \varepsilon: \tau_v = \frac{1}{z - \zeta} + \text{functio cont.},$$

$$\text{und } \tau_1, \dots, \tau_{v-1}, \tau_{v+1}, \dots, \tau_n \text{ stetig.}$$

Es ist daher:

$$\psi(t, z) = \tau_v \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_v} + \text{functio cont.}$$

und

$$\lim (z - \zeta) \cdot \psi(t, z) = \lim (z - \zeta) \cdot \tau_v \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_v} = \frac{F(t, \zeta)}{t - \sigma}.$$

$\psi(t, z)$  wird somit gleich  $\infty^1$  im Punkte  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  und es ist:

$$\text{II}^0) \quad \psi(t, z) = \frac{F(t, \zeta)}{t - \sigma} \cdot \frac{1}{z - \zeta} + \psi_1(t, z).$$

Bedenkt man, daß für alle endlichen Werte  $z = \alpha \neq \zeta$  überall  $\lim (z - \alpha) \tau = 0$  sein muß, so folgt:  $\psi_1$  ist im Endlichen überall stetig und daher, da es ebenso wie  $\psi$  einwertig ist, eine ganze Funktion von  $z$ .

Die weitere Untersuchung von  $\psi(t, z)$  wirft sich jetzt auf  $\psi_1(t, z)$  und stützt sich auf das Verhalten von  $\psi_1$  im Unendlichen.

Für  $z = \infty$  ist gefordert:

$$\tau_x = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\gamma_x}{z^2} + \frac{\gamma'_x}{z^3} + \dots \quad (x = 1 \dots n)$$

Im Unendlichen wird also:

$$\tau_x = 0^1.$$

Berücksichtigt man daher, daß außerdem für  $z = \infty$ :

$$\frac{F(t, z)}{t - s_x} = \infty^m$$

ist, so folgt, daß im Unendlichen  $\psi(t, z) = \infty^{m-1}$  und also auch  $\psi_1(t, z) = \infty^{m-1}$  wird.

Fassen wir die bisher ermittelten Eigenschaften von  $\psi_1(t, z)$  zusammen, so können wir sagen:

$$\text{III}^0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1 \text{ ist ganze Funktion von } t, \text{ vom Grade } n-1 \\ \text{und ganze Funktion von } z \text{ vom Höchstgrade} \\ m-1, \end{array} \right.$$

d. h.  $\psi_1(t, z) = \psi_1 \left( t, z \right)^{\binom{n-1}{m-1}}.$

Diese Funktion  $\psi_1$  arbeiten wir weiter aus. — Aus

$$\frac{F'(t, z)}{F(t, z)} = \sum_{x=1}^n \frac{1}{t - s_x}$$

folgt zunächst:

$$\sum_{x=1}^n \frac{F(t, z)}{t - s_x} = F'(t, z).$$

Da nun für  $z = \infty$ :

$$\psi(t, z) = \sum_{x=1}^n \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\gamma_x}{z^2} + \frac{\gamma'_x}{z^3} + \dots \right) \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x}$$

ist, so ergibt sich:

$$\psi(t, z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z)}{z} + \sum_{x=1}^n \left( \frac{\gamma_x}{z^2} + \dots \right) \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x},$$

und hieraus nach  $\Pi^0$ :

$$\psi_1(t, z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z)}{z} + \sum_{x=1}^n \left( \frac{\gamma_x}{z^2} + \dots \right) \cdot \frac{F(t, z)}{t - s_x} - \frac{F(t, \zeta)}{t - \sigma} \cdot \frac{1}{z - \zeta}.$$

Diesen Ausdruck, an dem die Eigenschaft von  $\psi_1$ , ganze Funktion von  $z$  zu sein, nicht mehr zu erkennen ist, formen wir so um, daß wenigstens der erste Summand in Ausdrücke von  $\psi_1$  als durch  $z$  teilbar erscheint. Entwickelt man den mit Benutzung einer verfügbaren GröÙe  $\gamma$  gebildeten Quotienten

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z) - F'(t, \gamma)}{z - \gamma},$$

in dem die Division aufgeht, teilweise nach Potenzen von  $z$ , so erhält man:

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z)}{z} + \frac{1}{n} \cdot F'(t, z) \cdot \left( \frac{\gamma}{z^2} + \frac{\gamma^2}{z^3} + \dots \right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, \gamma)}{z - \gamma},$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z)}{z} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z) - F'(t, \gamma)}{z - \gamma} \\ &- \frac{1}{n} \cdot \left[ F'(t, z) \cdot \left( \frac{\gamma}{z^2} + \frac{\gamma^2}{z^3} + \dots \right) - \frac{F'(t, \gamma)}{z - \gamma} \right], \end{aligned}$$

wo der in Klammern stehende Subtrahend rechts gleich  $\infty^{m-2}$  wird für  $z = \infty$ . Hieraus folgt:

$$\psi_1(t, z) = \frac{1}{n} \cdot \frac{F'(t, z) - F'(t, \gamma)}{z - \gamma} + \psi_2 \left( t, z, \begin{smallmatrix} n-1 \\ m-2 \end{smallmatrix} \right),$$

wo  $\psi_2$  eine ganze Funktion von  $t$  und  $z$  ist, von den Höchstgraden  $n-1$  und  $m-2$ :

$$\psi_2 = Ut^{n-1} + U_1 t^{n-2} + \dots + U_{n-1}.$$

Durch geeignete Verfügung über die willkürliche GröÙe  $\gamma$  läßt sich der Grad von  $\psi_2$  in  $t$  noch weiter erniedrigen. Aus den Formeln a<sup>0</sup>) und II<sup>0</sup>) ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned} & Vt^{n-1} + V_1 t^{n-2} + \dots + V_{n-1} \\ &= \frac{\varphi_0(\zeta) \cdot t^n + \varphi_1(\zeta) t^{n-1} + \dots}{t - \sigma} \cdot \frac{1}{z - \zeta} \\ &+ \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot \varphi_0(z) t^{n-1} + \dots - n \cdot \varphi_0(\gamma) \cdot t^{n-1} - \dots}{z - \gamma} \\ &+ Ut^{n-1} + U_1 t^{n-2} + \dots + U_{n-1}, \end{aligned}$$

und hieraus mit Berücksichtigung von b<sup>0</sup>)

$$U = \frac{\varphi_0(z) - \varphi_0(\zeta)}{z - \zeta} - \frac{\varphi_0(z) - \varphi_0(\gamma)}{z - \gamma}.$$

Nimmt man daher  $\gamma = \zeta$ , so wird  $U = 0$ , und man erhält für  $\psi(t, z)$  den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \text{IV}^0) \quad \psi(t, z) &= \frac{F(t, \zeta)}{t - \sigma} \cdot \frac{1}{z - \zeta} + \frac{1}{n} \cdot \frac{F''(t, z) - F''(t, \zeta)}{z - \zeta} \\ &+ \psi_2 \left( t^{n-2}, z^{m-2} \right), \end{aligned}$$

oder, mit Einführung der Abkürzung:

$$\text{c}^0) \quad \frac{F(t, \zeta)}{(t - \sigma)(z - \zeta)} + \frac{1}{n} \cdot \frac{F''(t, z) - F''(t, \zeta)}{z - \zeta} = T(t, z),$$

$$\text{IV}_2^0) \quad \psi(t, z) = T(t, z) + \psi_2 \left( t^{n-2}, z^{m-2} \right).$$

Läßt man hierin  $t = s_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ) werden, so ergibt sich wegen A<sup>0</sup>) das Gleichungssystem:

$$\tau_\mu \cdot F'(s_\mu, z) = T(s_\mu, z) + \psi_2 \left( s_\mu^{n-2}, z^{m-2} \right), \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

das äquivalent ist mit der einen Gleichung:

$$B^0) \quad \tau \cdot F'(s, z) = T(s, z) + \psi_2 \left( s^{n-2}, z^{m-2} \right).$$

Die  $(m-1)(n-1) = p+r$  konstanten Koeffizienten der Funktion  $\psi_2$  auf der rechten Seite dieser Gleichung sind nicht willkürlich. Geht man nämlich auf den ursprünglichen Ausdruck I<sup>0</sup>) von  $\psi(t, z)$  zurück, so erkennt man auf demselben Wege, auf dem wir früher diese Eigenschaft für den Zähler  $\varphi \left( s^{n-2}, z^{m-2} \right)$  des Integranden I. Gattung bewiesen haben, daß  $\psi(s, z)$  in den  $r$  Doppelpunkten  $s = \gamma_\varrho$ ,  $z = \delta_\varrho$  ( $\varrho = 1 \dots r$ ) von  $s$  gleich 0' werden muß. Die konstanten Koeffizienten von  $\psi_2$  müssen daher so bestimmt werden, daß die  $r$  Gleichungen:

$$d^0) \quad T(\gamma_\varrho, \delta_\varrho) + \psi_2 \left( \gamma_\varrho^{n-2}, \delta_\varrho^{m-2} \right) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

erfüllt sind, und die eingangs dieses Paragraphen gestellte Aufgabe besitzt nur dann eine Lösung, wenn die  $p+r$  Koeffizienten von  $\psi_2$  sich gemäß den Gleichungen d<sup>0</sup>) bestimmen lassen. Ist diese Koeffizientenbestimmung möglich und auch ausgeführt, so ist nach B<sup>0</sup>) die gesuchte Funktion  $\tau$  notwendig von der Form:

$$C^0) \quad \tau = \frac{T(s, z) + \psi_2 \left( s^{n-2}, z^{m-2} \right)}{F'(s, z)}.$$

Nimmt man umgekehrt, die Koeffizientenbestimmung in  $\psi_2$  vorausgesetzt, für  $\tau$  einen Ausdruck von dieser Form, so sind, wie sich unschwer nachweisen läßt, die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllt.

Die Frage nach der Existenz einer Funktion  $\tau$  der Klasse von den früher geforderten Eigenschaften ist somit zurückgeführt auf die Frage: ist es möglich, die Koeffizienten von  $\psi_2$  so zu bestimmen, daß die  $r$  Gleichungen d<sup>0</sup>) erfüllt sind?

Schreibt man die Gleichungen d<sup>0</sup>) in der Form:

$$d_{1.}^0) \quad \psi_2(\gamma_\varrho, \delta_\varrho) = T_\varrho, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

wo  $T_\varrho$  den Wert von  $T(s, z)$  im Doppelpunkte  $(\gamma_\varrho, \delta_\varrho)$  bezeichnet, so sieht man unmittelbar folgendes:



1°) die linken Seiten dieser Gleichungen sind lineare, homogene Formen der  $p+r$  Koeffizienten von  $\psi_2$ ;

2°) die rechten Seiten sind vollständig bestimmt durch die Doppelpunkte  $(\gamma_e, \delta_e)$  und die Lage des Unstetigkeitspunktes  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  und unabhängig von den Koeffizienten von  $\psi_2$ ;

3°) Die Gleichungen  $d_1^{(0)}$  stimmen bis auf die rechts stehenden unabhängigen Glieder  $T_e$  vollständig überein mit den Gleichungen  $\Pi_b^{(0)}$ , § 19.

Nach Satz IV°), § 19 erhält aber das Gleichungssystem  $\Pi_b^{(0)}$  unter keinen Umständen überzählige Gleichungen, weder für  $p > 0$  noch für  $p = 0$ . Dasselbe gilt also auch vom Gleichungssystem  $d_1^{(0)}$ . Ist dies aber der Fall, so schließen die Gleichungen  $d_1^{(0)}$  auch keinen Widerspruch in sich ein, namentlich erlauben sie, die  $p+r$  Koeffizienten von  $\psi_2$  zu bestimmen, ohne daß sich dabei eine Beziehung zwischen den in den unabhängigen Gliedern  $T_e$  vorkommenden Koordinaten  $\sigma$  und  $\zeta$  des Punktes  $\varepsilon$  ergibt. Die Gleichungen  $d_1^{(0)}$  beeinträchtigen also in keiner Weise die freie Wählbarkeit des Punktes  $\varepsilon$ .

Die Funktion  $\tau$  der Klasse mit den Eingangs dieses Paragraphen geforderten Eigenschaften existiert also auf jeden Fall, welches auch das Geschlecht  $p$  sei, und als Unstetigkeitspunkt  $\varepsilon$  können wir jeden im Endlichen gelegenen Punkt von  $T$  nehmen.

Schreibt man nun  $\psi_2$  in der Form:

$$\psi_2 = \sum_{\nu=0}^{n-2} \sum_{\mu=0}^{m-2} \Gamma_{\mu\nu} s^\nu z^\mu = \sum_{x=1}^{p+r} \Gamma_x \cdot \Phi_x(s, z),$$

wo  $\Phi_x(s, z) = s^\nu z^\mu$  ist, so bestimmen die Gleichungen  $d_1^{(0)}$   $r$  von diesen Koeffizienten  $\Gamma_x$  durch die übrigen  $p$ , etwa

$$\Gamma_{p+1}, \dots, \Gamma_\beta, \dots, \Gamma_{p+r}$$

durch

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_\alpha, \dots, \Gamma_p$$

und es ist allgemein:

$$e^0) \quad \Gamma_\beta = \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_\alpha \cdot q_{\alpha\beta} - \sum_{e=1}^r T_e \cdot \Delta_{e\beta}, \quad (\beta = p+1, \dots, p+r)$$

wo die  $q_\beta$  konstant und die  $\Delta_{q\beta}$  Determinantenquotienten sind, die nur von der Lage der Doppelpunkte abhängen, also ebenfalls konstant sind.

Aus e<sup>o</sup>) folgt:

$$\begin{aligned}\psi_2(s, z) &= \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_\alpha \cdot \Phi_\alpha \cdot \sum_{\beta=p+1}^r \Phi_\beta \left[ \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_\alpha \cdot q_{\alpha\beta} - \sum_{\varrho=1}^r T_\varrho \cdot \Delta_{\varrho\beta} \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_\alpha \cdot [\Phi_\alpha + \sum_{\beta} q_{\alpha\beta} \cdot \Phi_\beta] - \sum_{\varrho=1}^r T_\varrho \sum_{\beta} \Delta_{\varrho\beta} \cdot \Phi_\beta.\end{aligned}$$

Hätte das System d<sub>1</sub><sup>o</sup>) keine unabhängigen Glieder  $T_\varrho$  gehabt, d. h. hätten wir es mit den Gleichungen II<sub>v</sub><sup>o</sup>), § 19, zu thun, so hätte die rechte Seite der vorigen Gleichung sich reduziert auf

$$\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} [\Phi_{\alpha} + \sum_{\beta} q_{\alpha\beta} \Phi_{\beta}];$$

die  $p$  Klammerausdrücke  $\Phi_\alpha + \sum_{\beta} q_{\alpha\beta} \Phi_\beta$  sind also nichts anderes als die Zähler  $\varphi_1 \dots \varphi_p$  der  $p$  Fundamentalintegralen I. Gattung: Wir haben daher:

$$\psi_2 = \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha - \sum_{\varrho=1}^r T_\varrho \cdot \sum_{\beta} \Delta_{\varrho\beta} \cdot \Phi_\beta,$$

oder

$$\psi_2 = \sum \Gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha - \sum_{\varrho=1}^r T_\varrho \cdot \varphi'_\varrho,$$

wo die  $\varphi'_\varrho = \sum_{\beta} \Delta_{\varrho\beta} \cdot \Phi_\beta$  ganze Funktionen von  $s$  und  $z$  sind, die in diesen Variablen bis zu den Graden  $n-2$  und  $m-2$  ansteigen können.

Aus B<sup>o</sup>) ergibt sich nun:

$$\tau \cdot F'(s, z) = T - \sum_{\varrho=1}^r T_\varrho \cdot \varphi'_\varrho + \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_\alpha \cdot \varphi_\alpha,$$

oder, mit Einführung der Abkürzung:

$$f^o) \quad \Phi(o, \varepsilon) = T - \sum_{\varrho=1}^r T_\varrho \cdot \varphi'_\varrho(s, z).$$

$$D^o) \quad \tau = \frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)} + \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_\alpha \cdot w'_\alpha.$$

Das Zeichen  $(o, \varepsilon)$  soll dabei andeuten, daß  $\Phi$  eine Funktion der Koordinaten  $s, z$  des variablen Punktes  $o$  und der Koordinaten  $\sigma, \zeta$  des fest angenommenen Punktes  $\varepsilon$  ist.

Formel D<sup>o</sup>) enthält die Lösung der zu Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe. Das Integral der in D<sup>o</sup>) aufgestellten Funktion  $\tau$  der Klasse ist:

$$J = \int \frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)} dz + \sum_{\alpha=1}^p \Gamma_{\alpha} \cdot w_{\alpha} + \text{constans},$$

wo  $w_1 \dots w_p$   $p$  linearunabhängige Fundamentalintegrale I. Gattung sind. Da das allgemeine Integral  $\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \cdot w_{\alpha} + \text{const.}$  zu den logarithmischen Unstetigkeiten von  $J$  keinen Beitrag liefert, können wir es auch weglassen und erhalten so die zwei Formeln:

$$E^o) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)}, \\ J(o, \varepsilon) = \int \frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F''(s, z)} dz. \end{array} \right.$$

Dieses Integral der Klasse besitzt folgende Eigenschaften:

1<sup>o</sup>) Es ist in  $T$  überall stetig, mit Ausnahme des Punktes  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  und der  $\infty$ -fernen Punkte von  $T$ , und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon: J(o, \varepsilon) = \log(z - \zeta) + \text{functio const.}$$

$$\text{in } \infty_x: J(o, \varepsilon) = \frac{1}{n} \cdot \log z + f.c. \quad (x = 1, 2, \dots, n)$$

2<sup>o</sup>) Es ist eindeutig weder in  $T$  noch in  $T'$ , sondern erst in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T''$ , die man erhält, wenn man in  $T'$  noch einen Punktschnitt anlegt, der vom gemeinsamen Ausgangspunkte der Schnitte  $c_1 \dots c_p$  ausgeht und Strahlen  $l, l_1 \dots l_n$  nach  $\varepsilon$  und  $\infty_1 \dots \infty_n$  aussendet.

3<sup>o</sup>) In dieser Fläche  $T''$  besitzt  $J(o, \varepsilon)$  konstante Periodizitätsmoduln an  $a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p, l, l_1 \dots l_n$ , und zwar ist:

| an                           | $a_\lambda,$              | $b_\lambda,$              | $l,$      | $(l_1 \dots l_n)$   |
|------------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------|---------------------|
| $\overset{+}{J} - \bar{J} =$ | $A_\lambda(\varepsilon),$ | $B_\lambda(\varepsilon),$ | $2\pi i,$ | $-\frac{2\pi i}{n}$ |

wo  $A_\lambda(\varepsilon)$ ,  $B_\lambda(\varepsilon)$  definiert sind durch die Integrale (siehe Fig. 34):

$$A_\lambda(\varepsilon) = \int \left| \frac{\gamma}{\beta} \right|_{\lambda} dJ(o, \varepsilon), \quad B_\lambda(\varepsilon) = \int \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|_{\lambda} dJ(o, \varepsilon),$$

$$(\lambda = 1, 2 \dots p).$$

Diese Periodizitätsmoduln sind nicht unabhängig von einander. Bildet man nämlich das Integral

$$\int_{(T')} w \cdot \frac{dJ(o, \varepsilon)}{dz} dz,$$

worin  $w$  das allgemeine Integral I. Gattung bezeichnet, und die Integration sich in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von  $T'$  erstreckt, so ist:

$$1^\circ) \int_{(T')} w \cdot dJ(o, \varepsilon) = 2\pi i \text{ mal der Summe der Residuen von } w \cdot \frac{dJ(o, \varepsilon)}{dz} \text{ in } T'.$$

$w \cdot \frac{dJ(o, \varepsilon)}{dz}$  besitzt aber in  $T'$  Residuen nur in  $\varepsilon$  und in  $\infty_1 \dots \infty_n$ , und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon: \text{Res}(\varepsilon) = \left| w \cdot \frac{dJ}{dz} \right|_{\substack{1 \\ s-\xi}} = w(\varepsilon),$$

$$\text{in } \infty_x: \text{Res}(\infty_x) = - \left| w \cdot \frac{dJ}{dz} \right|_{\substack{1 \\ s}} = -\frac{1}{n} \cdot w(\infty_x).$$

In allen anderen Punkten  $z = \alpha$  ist

$$\lim(z - \alpha) \cdot w \cdot \frac{dJ}{dz} = 0,$$

und daher das zugehörige Residuum gleich Null. — Es ist also einerseits:

$$\int_{(T')} w \cdot \frac{dJ(o, \varepsilon)}{dz} dz = 2\pi i \cdot [w(\varepsilon) - \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n w(\infty_x)].$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} 2^0) \quad & \int_{(T')} w \cdot \frac{dJ(o, \varepsilon)}{dz} dz \\ &= \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \int \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|_{\lambda} \left( \overset{+}{w} \cdot d\overset{+}{J} - \bar{w} \cdot d\bar{J} \right) + \int \left| \frac{\gamma}{\beta} \right|_{\lambda} \left( \bar{w} \cdot d\bar{J} - \overset{+}{w} d\overset{+}{J} \right) \right\} \\ &= \sum_{\lambda=1}^p \left\{ A_{\lambda} \cdot \int \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|_{\lambda} dJ - B_{\lambda} \cdot \int \left| \frac{\gamma}{\beta} \right|_{\lambda} dJ \right\} \\ &= \sum_{\lambda=1}^p (A_{\lambda} \cdot B_{\lambda}(\varepsilon) - B_{\lambda} \cdot A_{\lambda}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Wir haben so die Beziehung:

$$F^0) \quad \sum_{\lambda=1}^p (A_{\lambda} \cdot B_{\lambda}(\varepsilon) - B_{\lambda} \cdot A_{\lambda}(\varepsilon)) = 2\pi i \cdot [w(\varepsilon) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^n w(\infty_x)],$$

worin  $w$  ein allgemeines Integral I. Gattung bezeichnet, mit den Periodizitätsmoduln  $A_{\lambda}, B_{\lambda}$  an  $a_{\lambda}, b_{\lambda}$ .

Die Beziehung  $F^0)$  vereinfacht sich, wenn man an Stelle des allgemeinen Integrals I. Gattung  $w$  ein definitiv normiertes Integral I. Gattung  $u_{\mu}$  nimmt. Es ist dann:

$$A_{\lambda} = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) \pi i, \quad B_{\lambda} = a_{\mu\lambda}, \quad \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^n u_{\mu}(\infty_x) = 0,$$

und daher:

$$\sum_{\lambda=1}^p (A_{\lambda} \cdot B_{\lambda}(\varepsilon) - B_{\lambda} \cdot A_{\lambda}(\varepsilon)) = \pi i \cdot B_{\mu}(\varepsilon) - \sum_{\lambda=1}^p a_{\mu\lambda} \cdot A_{\lambda}(\varepsilon).$$

Dies giebt den

**Satz I<sup>o</sup>)** Zwischen den Periodizitätsmoduln  $A_\lambda(\varepsilon)$ ,  $B_\lambda(\varepsilon)$  ( $\lambda = 1, 2 \dots p$ ) des Integrals  $J(o, \varepsilon)$  der Klasse bestehen die  $p$  Beziehungen:

$$G^o) \quad B_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \cdot \sum_{\lambda=1}^p a_{\mu\lambda} A_\lambda(\varepsilon) = 2 \cdot u_\mu(\varepsilon), \quad (\mu = 1, 2 \dots p)$$

worin  $u_\mu$  ein definitiv normiertes Integral I. Gattung ist.

Diese Beziehungen  $G^o)$  geben Anlaß zur Bildung einer für das Folgende grundlegenden Integralfunktion mit denselben Unstetigkeiten wie  $J(o, \varepsilon)$ , aber einfacheren Periodizitätseigenschaften. Bildet man nämlich das Integral

$$H^o) \quad P(o, \varepsilon) = J(o, \varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \cdot \sum_{\lambda=1}^p A_\lambda(\varepsilon) \cdot u_\lambda(o),$$

so gilt, wie unmittelbar ersichtlich, der

**Satz II<sup>o</sup>)** Das Integral  $P(o, \varepsilon)$  besitzt folgende Eigenschaften:

$$1^o) \text{ in } \varepsilon \text{ ist: } P(o, \varepsilon) = \log(z - \zeta) + \text{f. c.},$$

$$2^o) \text{ in } \infty_x \text{ ist: } P(o, \varepsilon) = \frac{1}{n} \log z + \text{f. c.},$$

$$3^o) P(o, \varepsilon) \text{ ist in } T'' \text{ überall eindeutig und stetig,}$$

$$4^o) P(o, \varepsilon) \text{ hat in } T'' \text{ die Periodizitätsmoduln:}$$

|  |              |                            |           |                     |
|--|--------------|----------------------------|-----------|---------------------|
| an   | $a_\lambda,$ | $b_\lambda,$               | $l,$      | $(l_1 \dots l_n)$   |
| $\begin{smallmatrix} + \\ P - \bar{P} = \end{smallmatrix}$ | 0,           | $2u_\lambda(\varepsilon),$ | $2\pi i,$ | $-\frac{2\pi i}{n}$ |

Mit Hilfe dieses von Christoffel in die Theorie der Abel'schen Funktionen eingeführten Integrals  $P(o, \varepsilon)$  der Klasse lassen sich mit Leichtigkeit die Normalintegrale II. und III. Gattung herstellen.

## § 23. Das Normalintegral II. Gattung.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß der Unstetigkeitspunkt  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  der Funktion  $\tau$ , der zugleich ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt des Integrals  $P(o, \varepsilon)$  ist, beliebig im Innern der Fläche  $T$  angenommen werden kann. Wir können daher das Integral  $P(o, \varepsilon)$  auch als Funktion der unbeschränkt veränderlichen GröÙe  $\zeta$  ansehen und es nach dieser Variablen  $\zeta$  differenzieren. Bildet man nun den Differentialquotienten:

$$-\frac{dP(o, \varepsilon)}{d\zeta},$$

so ist:

$$\text{in } \varepsilon: -\frac{dP(o, \varepsilon)}{d\zeta} = \frac{1}{z-\zeta} + \text{functio cont.},$$

$$\text{in } \infty_x: -\frac{dR(o, \varepsilon)}{d\zeta} = \text{f. c.}$$

Die Funktion

$$1^\circ) \quad t(o, \varepsilon) = -\frac{dP(o, \varepsilon)}{d\zeta} + \text{const.},$$

die sonach in  $T$  keine logarithmische Unstetigkeit besitzt und nur an der einen Stelle  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  algebraisch unstetig wird zur Ordnung 1, heißt das Normalintegral II. Gattung mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt 1. Ordnung  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ . Für dieses Integral gelten folgende Sätze.

**Satz I<sup>o</sup>)** Das Normalintegral II. Gattung  $t(o, \varepsilon)$  ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften:

1<sup>o</sup>)  $t(o, \varepsilon)$  ist in  $T'$  eindeutig;

2<sup>o</sup>) es wird in  $T'$  nur einmal algebraisch unstetig, nämlich im Punkte  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  und dort ist:

$$t(o, \varepsilon) = \frac{1}{z-\zeta} + \text{f. c.};$$

3<sup>o</sup>) seine Periodizitätsmoduln sind:

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| an  | $a_1, \quad b_1,$               |
| $\begin{matrix} + & - \\ t & -t = \end{matrix}$ | $0, \quad -2u'_1(\varepsilon).$ |

Da  $u'_z$  eine Funktion der Klasse ist, so sind die Periodizitätsmoduln von  $t(o, \varepsilon)$  an den Querschnitten  $b_\lambda$  algebraische Funktionen der Unstetigkeitsstelle  $\varepsilon$ .

**Satz II<sup>o</sup>)** Das Normalintegral II. Gattung  $t(o, \varepsilon)$  ist durch Angabe seines Unstetigkeitspunktes bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmt.

Beweis: Sind  $t_1$  und  $t_2$  zwei Normalintegrale II. Gattung mit derselben Unstetigkeitsstelle, so ist die Differenz  $t_1 - t_2$  ein Integral der Klasse, das in  $T'$  überall eindeutig und stetig ist, also ein Integral I. Gattung; da dieses Integral außerdem an den Querschnitten  $a_\lambda, b_\lambda$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) lauter verschwindende Periodizitätsmoduln hat, so reduziert es sich auf eine Konstante, w. z. b. w.

Verfügen wir über diese in  $t(o, \varepsilon)$  enthaltene additive Konstante so, daß

$$2^o) \quad \sum_{x=1}^n t(\infty_x, \varepsilon) = 0$$

ist, so möge  $t(o, \varepsilon)$  das definitiv normierte Integral II. Gattung mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkte 1. Ordnung  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  heißen.

Für dieses definitiv normierte Integral II. Gattung läßt sich ein bemerkenswerter Ausdruck ableiten.)\*

Bildet man das Integral

$$3^o) \quad \int_{(T^r)} t(o, \varepsilon) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} dz,$$

worin der Punkt  $E(S, Z)$  ebenso unbeschränkt variabel sei, wie der Punkt  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ , so ist:

$$1^o) \quad \int_{(T^r)} t(o, \varepsilon) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} dz \\ = \sum_{\lambda=1}^p \left\{ \int \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|_{\lambda} \left( \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} t \right) dP - \int \left| \frac{\gamma}{\beta} \right|_{\lambda} \left( \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} t \right) dP \right\} = 0,$$

---

\*) Nach einer Vorlesung von Christoffel.



wie sich unmittelbar aus den Periodizitätseigenschaften von  $t(o, \varepsilon)$  und  $P(o, \varepsilon)$  ergibt.

Andererseits ist:

$$2^0) \int_{(T')} t(o, \varepsilon) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} dz = 2\pi i \text{ mal der Summe der} \\ \text{Residuen von } t(o, \varepsilon) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} \text{ in } T'.$$

Diese Funktion besitzt Residuen:

$\alpha^0)$  in  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ : dort ist:

$$t(o, \varepsilon) = \frac{1}{z - \zeta} + \text{f. c.}, \quad \lim (z - \zeta) \cdot t(o, \varepsilon) = 1 \\ \lim \frac{dP(o, E)}{dz} = \frac{dP(\varepsilon, E)}{dz}.$$

und daher:  $\text{Res}(\varepsilon) = \frac{dP(\varepsilon, E)}{d\zeta}.$

$\beta^0)$  in  $E(S, Z)$ : dort ist:

$$P(o, E) = \log(z - Z) + \text{f. c.}, \\ \lim (z - Z) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} = 1,$$

und folglich:  $\text{Res}(E) = t(E, \varepsilon).$

Da im Endlichen sonst überall für  $z = \alpha$ :

$$\lim (z - \alpha) \cdot t(o, \varepsilon) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} = 0 \text{ ist,}$$

so kommen für endliche  $z$  weiter keine Residuen vor.

$\gamma^0)$  in  $\infty_x$  ( $x = 1 \dots n$ ): hier ist:

$$P(o, E) = \frac{1}{n} \cdot \log z + \text{f. c.}, \\ \frac{dP(o, E)}{dz} = \frac{1}{nz} + \text{f. c.},$$

und daher  $\text{Res}(\infty_x) = -\frac{1}{n} \cdot t(\infty_x, \varepsilon). \quad (x = 1, 2 \dots n)$

Durch Gleichsetzen der zwei für das Integral

$$\int_{(T)} t(o, \varepsilon) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} dz$$

erhaltenen Werte ergibt sich:

$$0 = \frac{dP(\varepsilon, E)}{d\zeta} + t(E, \varepsilon) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^n t(\infty_x, \varepsilon),$$

oder, wenn wir  $t(o, \varepsilon)$  als definitiv normiert voraussetzen:

$$t(E, \varepsilon) = - \frac{dP(\varepsilon, E)}{d\zeta}.$$

Schreibt man hierin für den unbeschränkt variablen Punkt  $E(S, Z)$  wieder  $o(s, z)$ , so erhält man:

$$4^0) \quad t(o, \varepsilon) = - \frac{dP(\varepsilon, o)}{d\zeta}.$$

Aus der Definitionsformel:

$$\frac{dP(o, \varepsilon)}{dz} = \frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F'(s, z)} - \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^p A_{\lambda}(\varepsilon) \cdot u'_{\lambda}(o)$$

folgt aber:

$$\frac{dP(\varepsilon, o)}{d\zeta} = \frac{\Phi(\varepsilon, o)}{F'(\sigma, \zeta)} - \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^p A_{\lambda}(o) \cdot u'_{\lambda}(\varepsilon).$$

Setzt man dies in 4<sup>0</sup>) ein, so ergibt sich für das definitiv normierte Integral  $t(o, \varepsilon)$  die Formel:

$$5^0) \quad t(o, \varepsilon) = \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^p A_{\lambda}(o) \cdot u'_{\lambda}(\varepsilon) - \frac{\Phi(\varepsilon, o)}{F'(\sigma, \zeta)}.$$

Aus 1<sup>0</sup>) und 4<sup>0</sup>) ergibt sich zugleich, daß die zwei Differentialquotienten

$$\frac{dP(o, \varepsilon)}{d\zeta} \quad \text{und} \quad \frac{dP(\varepsilon, o)}{d\zeta}$$

sich nur um eine Konstante unterscheiden.

Die vorigen Betrachtungen lassen sich verallgemeinern. Bildet man die Funktion

$$6^0) \quad t^{(\nu)}(o, \varepsilon) = -\frac{d^\nu P(o, \varepsilon)}{d\zeta^\nu} + \text{const.},$$

so ist dieselbe in  $T'$  überall eindeutig und wird unstetig nur im Punkte  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ , und zwar ist dort:

$$7^0) \quad t^{(\nu)}(o, \varepsilon) = \frac{(\nu-1)!}{(z-\zeta)^\nu} + f.c. \quad (\nu > 1).$$

Das Integral  $t^{(\nu)}(o, \varepsilon)$  hat an den Querschnitten  $a_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2 \dots p$ ) Periodizitätsmoduln  $A_\lambda^{(\nu)}(\varepsilon)$ , die alle  $= 0$  sind; um die Periodizitätsmoduln  $B_\lambda^{(\nu)}(\varepsilon)$  von  $t^{(\nu)}(o, \varepsilon)$  an den Querschnitten  $b_\lambda$  zu bestimmen, bilden wir das Randintegral:

$$Q = \int_{(T')} u_\mu \cdot \frac{d t^{(\nu)}(o, \varepsilon)}{dz} dz.$$

Dieses Integral ist einerseits, wie die wirkliche Auswertung zeigt, gleich  $\pi i \cdot B_\mu^{(\nu)}(\varepsilon)$ . Andererseits ist  $Q = 2\pi i$  mal der Summe der Residuen von

$$u_\mu \cdot \frac{d t^{(\nu)}(o, \varepsilon)}{dz} \text{ in } T'.$$

Beachtet man, daß der Integrand

$$u_\mu \cdot \frac{d t^{(\nu)}(o, \varepsilon)}{dz}$$

ein von Null verschiedenes Residuum nur im Punkte  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$  besitzen kann, und daß an dieser Stelle:

$$\begin{aligned} \frac{d t^{(\nu)}(o, \varepsilon)}{dz} &= -\frac{\nu!}{(z-\zeta)^{\nu+1}} + f.c., \\ u_\mu &= u_\mu(\varepsilon) + (z-\zeta) \cdot u'_\mu(\varepsilon) \\ &+ \frac{(z-\zeta)^2}{2!} u''_\mu(\varepsilon) + \dots + \frac{(z-\zeta)^\nu}{\nu!} u_\mu^{(\nu)}(\varepsilon) + \dots \end{aligned}$$

ist, wo allgemein  $u_\mu^{(\nu)}$  die  $\nu$ te Derivierte von  $u_\mu$  nach  $z$  bedeutet, so sieht man, daß das Residuum im Punkte  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$

gleich  $-u_{\mu}^{(\nu)}(\varepsilon)$  ist. Durch Gleichsetzung der zwei für  $Q$  erhaltenen Werte ergibt sich:

$$\pi i \cdot B_{\mu}^{(\nu)}(\varepsilon) = -2 \pi i \cdot u_{\mu}^{(\nu)}(\varepsilon),$$

oder

$$8^0) \quad B_{\mu}^{(\nu)}(\varepsilon) = -2 \cdot u_{\mu}^{(\nu)}(\varepsilon).$$

Das Integral  $t^{(\nu)}(o, \varepsilon)$  nennen wir das Normalintegral II. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt  $\nu^{\text{ter}}$  Ordnung  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ .

Für  $t^{(\nu)}(o, \varepsilon)$  gilt, wie für  $t(o, \varepsilon)$  der Satz, daß es durch Angabe seines Unstetigkeitspunktes bis auf eine additive Konstante völlig bestimmt ist. Verfügt man über diese Konstante so, daß

$$\sum_{x=1}^n t^{(\nu)}(\infty_x, \varepsilon) = 0$$

ist, so erhält man das definitiv normierte Integral II. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt  $\nu^{\text{ter}}$  Ordnung  $\varepsilon(\sigma, \zeta)$ .

Für dieses Integral läßt sich eine Darstellungsform angeben, die analog ist dem in 5<sup>0</sup>) für das definitiv normierte Integral  $t(o, \varepsilon)$  gegebenen Ausdruck. Bildet man nämlich das Randintegral:

$$\int_{(T')} t^{(\nu)}(o, \varepsilon) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} dz$$

und berücksichtigt man, daß dieses Integral einerseits  $= 0$ , andererseits aber auch gleich  $2\pi i$  mal der Summe der Residuen von

$$t^{(\nu)}(o, \varepsilon) \cdot \frac{dP(o, E)}{dz} \text{ in } T'$$

ist, so erhält man, wie eine leichte Rechnung zeigt, für das definitiv normierte Integral  $t^{(\nu)}(o, \varepsilon)$  die Darstellungsformel:

$$9^0) \quad t^{(\nu)}(o, \varepsilon) = \frac{1}{\pi i} \cdot \sum_{\lambda=1}^p A_{\lambda}(o) \cdot u_{\lambda}^{(\nu)}(\varepsilon) - \frac{d^{\nu-1}}{d\zeta^{\nu-1}} \left( \frac{\Phi(\varepsilon, o)}{F'(\sigma, \zeta)} \right).$$

Die Ableitung dieser Formel liefert zugleich das Resultat, daß die zwei Derivierten  $\nu^{\text{ter}}$  Ordnung:

$$\frac{d^\nu P(o, \varepsilon)}{d\zeta^\nu} \quad \text{und} \quad \frac{d^\nu P(\varepsilon, o)}{d\zeta^\nu}$$

sich nur um eine additive Konstante unterscheiden.

### § 24. Das Normalintegral III. Gattung.

Bezeichnen  $P(o, \varepsilon_1)$  und  $P(o, \varepsilon_2)$  zwei Integralfunktionen mit den Unstetigkeitsstellen

$$\varepsilon_1(\alpha_1, \zeta_1): P(o, \varepsilon_1) = \log(z - \zeta_1) + \text{f. c.},$$

resp.

$$\varepsilon_2(\alpha_2, \zeta_2): P(o, \varepsilon_2) = \log(z - \zeta_2) + \text{f. c.},$$

so heißt die Differenz:

$$1^\circ) \quad \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = P(o, \varepsilon_1) - P(o, \varepsilon_2)$$

ein Normalintegral III. Gattung. Für dieses Integral gelten folgende Sätze:

**Satz I<sup>o</sup>)** 1<sup>o</sup>)  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  ist ein Integral der Klasse;

2<sup>o</sup>)  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  bleibt im Unendlichen stetig und besitzt im Endlichen nur die zwei Unstetigkeitspunkte  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon_1: \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \log(z - \zeta_1) + \text{f. c.},$$

$$\text{in } \varepsilon_2: \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\log(z - \zeta_2) + \text{f. c.};$$

3<sup>o</sup>)  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  ist eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T''$ , die man erhält, wenn man in  $T'$  von dem gemeinsamen Kreuzungspunkte aller Schnitte  $c_i$  aus nach  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  zwei Punktschnitte  $l_1$  und  $l_2$  anlegt, die weder sich selbst noch die übrigen Schnitte von  $T'$  kreuzen;

4<sup>o</sup>) die Periodizitätsmodulen von  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  sind:

| an   | $a_i$ | $b_i$  | $l_1$    | $l_2$     |
|--|-------|--|----------|-----------|
| $\begin{matrix} + \\ \tilde{\omega} - \tilde{\omega} = \end{matrix}$ | 0     | $2[u_1(\varepsilon_1) - u_1(\varepsilon_2)]$ | $2\pi i$ | $-2\pi i$ |

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung 1<sup>o</sup>) von  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  und aus den Eigenschaften der Integralfunktion  $P(o, \varepsilon)$ .

**Satz II<sup>o</sup>)**  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  ist durch seine logarithmischen Unstetigkeitspunkte  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  bis auf eine additive Konstante völlig bestimmt.

Beweis: Bezeichnen  $\tilde{\omega}_1$  und  $\tilde{\omega}_2$  zwei Normalintegrale III. Gattung mit denselben Unstetigkeitspunkten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , so ist die Differenz  $\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2$  in  $T'$  allenthalben endlich, also ein Integral I. Gattung; da dieses Integral ferner an  $a_1 \dots a_p$  lauter verschwindende Periodizitätsmoduln hat, so ist es eine Konstante, w. z. b. w.

**Satz III<sup>o</sup>)** Es ist:  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ .

Der Beweis folgt ohne weiteres aus der Definitionsgleichung 1<sup>o</sup>).

**Satz IV<sup>o</sup>)** Jedes Normalintegral III. Gattung läßt sich darstellen als Differenz zweier Normalintegrale III. Gattung mit einem gemeinsamen logarithmischen Unstetigkeitspunkte und denselben Grenzen, wie das ursprüngliche Integral.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= P(o, \varepsilon_1) - P(o, \varepsilon_2) \\ &= [P(o, \varepsilon_1) - P(o, \varepsilon_3)] - [P(o, \varepsilon_2) - P(o, \varepsilon_3)] \\ &= \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) - \tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_3).\end{aligned}$$

**Satz V<sup>o</sup>)** Die Summe von drei Normalintegralen III. Gattung  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$  und  $\tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_1)$  mit denselben unteren und oberen Grenzen ist gleich Null.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \tilde{\omega}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) + \tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_1) \\ = P(o, \varepsilon_1) - P(o, \varepsilon_2) + P(o, \varepsilon_2) - P(o, \varepsilon_3) \\ + P(o, \varepsilon_3) - P(o, \varepsilon_1) = 0.\end{aligned}$$

Ein weiterer wichtiger Satz über Normalintegrale  
 III. Gattung läßt sich folgenderweise ableiten.

Wir bilden das Randintegral:

$$2^o) \quad U = \int_{(T')} \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \frac{d\tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)}{dz} \cdot dz,$$

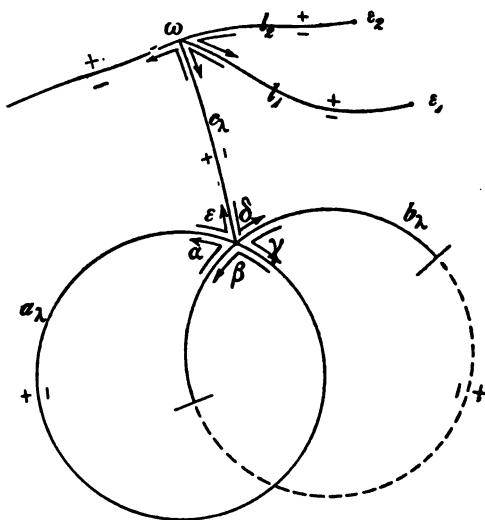


Fig. 35.

wo  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$  zwei Normalintegrale mit den angeschriebenen logarithmischen Unstetigkeitspunkten sind, und die Integration sich in positiver Richtung über die vollständige Begrenzung der Fläche  $T''$  erstreckt, in welcher  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  eindeutig ist (siehe Figur 35). In dieser Fläche  $T''$  ist der Integrand

$$U' = \tilde{\omega}_{12} \cdot \frac{d\tilde{\omega}_{34}}{dz},$$

( $\tilde{\omega}_{12} = \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\tilde{\omega}_{34} = \tilde{\omega}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ ) eindeutig, logarithmisch unstetig in  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , algebraisch unstetig in  $\varepsilon_3$  und  $\varepsilon_4$  und

sonst überall stetig. Residuen besitzt  $U'$  also nur in  $\varepsilon_3$  und  $\varepsilon_4$ , und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon_3: \frac{d\tilde{\omega}_{34}}{dz} = \frac{1}{z - \zeta_3} + \text{f. c.}, \quad \text{Res}(\varepsilon_3) = \tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_3);$$

$$\text{in } \varepsilon_4: \frac{d\tilde{\omega}_{34}}{dz} = -\frac{1}{z - \zeta_4} + \text{f. c.}, \quad \text{Res}(\varepsilon_4) = -\tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_4).$$

Die Summe der Residuen von  $U'$  in  $T''$  ist daher gleich

$$3^0) \quad \tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_3) - \tilde{\omega}_{12}(\varepsilon_4) = \frac{1}{2\pi i} \cdot U.$$

Durch wirkliche Ausführung der Integration erhält man andererseits:

$$\begin{aligned} U = \sum_{\lambda=1}^p & \left[ \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ a \\ \beta \end{matrix} \right|_{\lambda} \left( \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} - \bar{\tilde{\omega}}_{12} \cdot d\bar{\tilde{\omega}}_{34} \right) \right. \\ & + \int \left| \begin{matrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{matrix} \right|_{\lambda} \left( \bar{\tilde{\omega}}_{12} \cdot d\bar{\tilde{\omega}}_{34} - \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} \cdot d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} \right) \Big] \\ & + \int \left| \begin{matrix} \omega \\ l_1 \\ \varepsilon_1 \end{matrix} \right| \left( \bar{\tilde{\omega}}_{12} d\bar{\tilde{\omega}}_{34} - \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} \right) \\ & + \int \left| \begin{matrix} \varepsilon_2 \\ l_2 \\ \omega \end{matrix} \right| \left( \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} - \bar{\tilde{\omega}}_{12} \cdot d\bar{\tilde{\omega}}_{34} \right). \end{aligned}$$

Aus den Periodizitätseigenschaften von  $\tilde{\omega}_{12}$  und  $\tilde{\omega}_{34}$  folgt zunächst, daß die rechtsstehende  $p$ -gliedrige Summe gleich Null ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} \text{an } l_1: \quad d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} &= d\bar{\tilde{\omega}}_{34}, \\ \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} - \bar{\tilde{\omega}}_{12} &= 2\pi i, \\ \text{an } l_2: \quad d\overset{+}{\tilde{\omega}}_{34} &= d\bar{\tilde{\omega}}_{34}, \\ \overset{+}{\tilde{\omega}}_{12} - \bar{\tilde{\omega}}_{12} &= 2\pi i, \end{aligned}$$



und daher:

$$\begin{aligned} \int \left| \frac{\omega}{l_1} \right|_{\varepsilon_1} (\bar{\omega}_{12} d\bar{\omega}_{34} - \bar{\omega}_{12}^+ \cdot d\bar{\omega}_{34}^+) &= -2\pi i \cdot \int \left| \frac{\omega}{l_1} \right|_{\varepsilon_1} d\bar{\omega}_{34} \\ &= -2\pi i \cdot [\bar{\omega}_{34}(\omega) - \bar{\omega}_{34}(\varepsilon_1)], \\ \int \left| \frac{\varepsilon_2}{l_2} \right|_{\omega} (\bar{\omega}_{12}^+ d\bar{\omega}_{34}^+ - \bar{\omega}_{12} \cdot d\bar{\omega}_{34}) &= -2\pi i \cdot \int \left| \frac{\varepsilon_2}{l_2} \right|_{\omega} d\bar{\omega}_{34} \\ &= -2\pi i [\bar{\omega}_{34}(\varepsilon_2) - \bar{\omega}_{34}(\omega)]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$4^0) \quad U = 2\pi i [\bar{\omega}_{34}(\varepsilon_1) - \bar{\omega}_{34}(\varepsilon_2)],$$

und durch Vergleichung von 3<sup>0</sup>) und 4<sup>0</sup>):

$$5^0) \quad \bar{\omega}_{12}(\varepsilon_3) - \bar{\omega}_{12}(\varepsilon_4) = \bar{\omega}_{34}(\varepsilon_1) - \bar{\omega}_{34}(\varepsilon_2),$$

oder

$$5_a^0) \quad \int_{\varepsilon_4}^{\varepsilon_3} d\bar{\omega}_{12} = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} d\bar{\omega}_{34}.*)$$

**Satz VI<sup>0</sup>)** Ein Normalintegral III. Gattung ändert seinen Wert nicht, wenn man seine logarithmischen Unstetigkeitsstellen mit seinen Grenzen vertauscht.

Nennt man die Koordinaten  $\sigma_1, \zeta_1$  und  $\sigma_2, \zeta_2$  von  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  die Parameter, die Koordinaten  $\sigma_3, \zeta_3$  und  $\sigma_4, \zeta_4$  von  $\varepsilon_3$  und  $\varepsilon_4$  die Argumente von  $\bar{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{\varepsilon_3}^{\varepsilon_4} d\bar{\omega}_{12}$ , so kann man auch sagen:

---

\*) Die Gleichung 5<sub>a</sub><sup>0</sup>) ist nur dann genau, wenn die Integrationswege links und rechts die Begrenzung der zu  $\bar{\omega}_{12}$  resp.  $\bar{\omega}_{34}$  gehörigen Fläche  $T''$  nicht überschreiten; krenzen die Integrationswege die Querschnitte, so sind die zwei Seiten von 5<sub>a</sub><sup>0</sup>) einander gleich bis auf ganzzahlige Vielfache der Periodizitätsmoduln.

Dies giebt den

**Satz VI.<sup>o</sup>)** Ein Normalintegral III. Gattung ändert seinen Wert nicht, wenn man in ihm Argument und Parameter vertauscht.

In dieser Form wird der Vertauschungssatz für das Normalintegral III. Gattung zumeist ausgesprochen.

## § 25. Zerlegung des allgemeinen Abel'schen Integrales.

Es sei  $\tau$  eine algebraische Funktion der Klasse,  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_x \dots \varepsilon_q$  ihre Unstetigkeitspunkte,  $\nu_1 \dots \nu_x \dots \nu_q$  die Ordnungen des Unstetigwerdens von  $\tau$  in diesen Punkten,  $G_1 \dots G_x \dots G_q$  die zugehörigen Residuen, und allgemein:

$$1^o) \quad \text{in } \varepsilon_x (z = \zeta_x): \tau = \frac{G_x}{z - \zeta_x} + \frac{A_1^{(x)}}{(z - \zeta_x)^2} \\ + \frac{A_2^{(x)}}{(z - \zeta_x)^3} + \dots + \frac{A_{\nu_x-1}^{(x)}}{(z - \zeta_x)^{\nu_x}} + \text{f. c.} \dots$$

Nach § 23 und 24 ist dann, wenn  $J$  das Integral der Klasse

$$2^o) \quad J = \int \tau dz$$

bezeichnet, und berücksichtigt wird, daß zufolge  $G_1 + \dots + G_q = 0$ :

$$G_q \cdot P(o, \varepsilon_q) = - \sum_{x=1}^{q-1} G_x \cdot P(o, \varepsilon_x)$$

ist, die Differenz:

$$J - \sum_{x=1}^{q-1} G_x \cdot \tilde{\omega}(\varepsilon_x, \varepsilon_q) \\ - \sum_{x=1}^q \left[ -A_1^{(x)} \cdot t(o, \varepsilon_x) - \frac{2}{1!} A_2^{(x)} \cdot t^{(2)}(o, \varepsilon_x) \right. \\ \left. - \frac{3}{2!} A_3^{(x)} \cdot t^{(3)}(o, \varepsilon_x) - \dots - \frac{\nu_x-1}{(\nu_x-2)!} A_{\nu_x-1}^{(x)} \cdot t^{(\nu_x-1)}(o, \varepsilon_x) \right]$$

ein in der Fläche  $T$  überall endliches Integral der Klasse, also ein Integral I. Gattung  $w = \sum_{\mu=1}^p c_\mu w_\mu + \text{const.}$  Für das Integral  $J$  ergibt sich hieraus die Zerlegungsformel:

$$I^0) \left\{ \begin{aligned} J &= \int \tau dz \\ &= \sum_{x=1}^{q-1} G_x \cdot \tilde{\omega}(\varepsilon_x, \varepsilon_q) \\ &\quad - \sum_{x=1}^q \left[ A_1^{(x)} \cdot t(o, \varepsilon_x) + \frac{2}{1!} A_2^{(x)} \cdot t^{(2)}(o, \varepsilon_x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2!} A_3^{(x)} \cdot t^{(3)}(o, \varepsilon_x) + \dots + \frac{\nu_x - 1}{(\nu_x - 2)!} A_{\nu_x - 1}^{(x)} \cdot t^{(\nu_x - 1)}(o, \varepsilon_x) \right] \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^p c_\mu w_\mu + \text{konstans.}, \end{aligned} \right.$$

welche den Satz enthält:

**Satz I<sup>0</sup>)** Das allgemeine Abel'sche Integral  $J = \int \tau dz$  läßt sich darstellen als Summe von geeignet gewählten Integralen I, II. und III. Gattung.

Aus der Formel I<sup>0</sup>), in der allgemein

$$c_\mu = \frac{1}{\pi i} \text{ mal dem Periodizitätsmodul von } J \text{ an } a_\mu$$

ist, folgt ferner:

**Satz II<sup>0</sup>)** Ein Abel'sches Integral  $J = \int \tau dz$  ist bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmt, wenn gegeben sind:

- 1<sup>0</sup>) die Unstetigkeitspunkte  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_x \dots \varepsilon_q \dots$  mit den zugehörigen Residuen  $G_1 \dots G_x \dots G_q$  und den Koeffizienten  $A_1^{(x)} \dots A_{\nu_x - 1}^{(x)}$  ( $x = 1, \dots, q$ ), wobei  $G_1 + \dots + G_q = 0$  sein muß, und
- 2<sup>0</sup>) die Periodizitätsmoduln von  $J$  an  $p$  von den  $2p$  Querschnitten  $a_\lambda, b_\lambda$ , oder die reellen (oder auch die rein imaginären) Bestandteile der Periodizitätsmoduln an sämtlichen Querschnitten  $a_\lambda, b_\lambda$ .

Die Formel I<sup>0</sup>) läßt sich vereinfachen, wenn man einen Begriff zu Grunde legt, den wir jetzt einführen wollen.

Es seien  $K_1, K_2 \dots K_m$  Integrale der Klasse ohne logarithmische Unstetigkeiten, also Integrale I. und II. Gattung. Wir nennen diese  $m$  Integrale algebraisch unabhängig, wenn die Summe

$$3^0) \quad S = \sum_{x=1}^m A_x \cdot K_x,$$

worin die  $A_x$  zur Verfügung stehende, konstante Koeffizienten sind, sich dann und nur dann auf eine algebraische Funktion der Klasse reduziert, wenn die  $m$  Koeffizienten  $A_x$  alle gleich Null gesetzt werden.

Wir bestimmen die Anzahl der algebraisch unabhängigen Integrale I. und II. Gattung. — Die Summe

$S = \sum_{x=1}^m A_x \cdot K_x$  reduziert sich dann und nur dann auf eine Funktion der Klasse, wenn die  $2p$  Periodizitätsmoduln von  $S$  an  $a_\lambda, b_\lambda$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) gleich Null sind. Schreiben wir diese Bedingungen an, so giebt das  $2p$  Gleichungen, die in den  $A_x$  linear und homogen sind. Ist nun  $m > 2p$ , so haben diese Gleichungen stets ein System von Lösungswerten  $A_x$ , die nicht alle Null sind. Die Anzahl der algebraisch unabhängigen Integrale I. und II. Gattung kann also nicht  $> 2p$  sein.

Andererseits lassen sich stets  $2p$  algebraisch unabhängige Integrale I. und II. Gattung auffinden. Nimmt man nämlich die  $p$  linearunabhängigen Normalintegrale  $u_1 \dots u_p$ , und dazu  $p$  Normalintegrale II. Gattung  $t(o, \gamma_1) \dots t(o, \gamma_p)$ , deren Unstetigkeitsstellen  $\gamma_1 \dots \gamma_p$  so gewählt sind, daß die Determinante:

$$4^0) \quad D = \begin{vmatrix} u'_1(\gamma_1) & u'_1(\gamma_2) & \dots & u'_1(\gamma_p) \\ u'_2(\gamma_1) & u'_2(\gamma_2) & \dots & u'_2(\gamma_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u'_p(\gamma_1) & u'_p(\gamma_2) & \dots & u'_p(\gamma_p) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so sind diese  $2p$  Integrale algebraisch unabhängig.

Bildet man nämlich die Summe:

$$S = \sum_{\lambda=1}^p A_\lambda u_\lambda + \sum_{\lambda=1}^p B_\lambda \cdot t(o, \gamma_\lambda),$$



$\gamma_1 \dots \gamma_q$  nicht alle von einander getrennt zu liegen. Fallen z. B. die 3 Punkte  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  in den einen Punkt  $\gamma$  zusammen, so bilden die  $p$  Integrale  $u_1 \dots u_p$  zusammen mit den Normalintegralen II. Gattung  $t(o, \gamma), t^{(2)}(o, \gamma), t^{(3)}(o, \gamma), t(o, \gamma_u) \dots t(o, \gamma_p)$  wieder ein Fundamentalsystem, und die Determinante  $D$  in 4<sup>o</sup>) geht über in:

$$D_1 = \begin{vmatrix} u'_1(\gamma) & u''_1(\gamma) & u'''_1(\gamma) & u'_1(\gamma_u) \dots u'_1(\gamma_p) \\ u'_2(\gamma) & u''_2(\gamma) & u'''_2(\gamma) & u'_2(\gamma_u) \dots u'_2(\gamma_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u'_p(\gamma) & u''_p(\gamma) & u'''_p(\gamma) & u'_p(\gamma_u) \dots u'_p(\gamma_p) \end{vmatrix}.$$

Es können sogar sämtliche  $p$  Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_p$  in einem Punkte sich vereinigen. Bildet man nämlich die Determinante:

$$5^o) \quad D_2 = \begin{vmatrix} u'_1(\gamma) & u''_1(\gamma) \dots u^{(p)}_1(\gamma) \\ u'_2(\gamma) & u''_2(\gamma) \dots u^{(p)}_2(\gamma) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u'_p(\gamma) & u''_p(\gamma) \dots u^{(p)}_p(\gamma) \end{vmatrix},$$

wo  $u', u'', \dots u^{(p)}$  die erste, zweite,  $\dots$   $p$ -te Derivierte des Integrals I. Gattung  $u$  bezeichnen, so folgt aus der Linearunabhängigkeit von  $u'_1 \dots u'_p$ , daß  $D_2$  nicht für alle Lagen der Punkte  $\gamma$  gleich Null sein kann. Wählt man daher den Punkt  $\gamma$  so, daß  $D_2 \neq 0$  ist, so bilden die  $2p$  Integrale

$$u_1, u_2, \dots, u_p, t(o, \gamma), t^{(2)}(o, \gamma), t^{(3)}(o, \gamma), \dots, t^{(p)}(o, \gamma)$$

ein Fundamentalsystem.

Die Wichtigkeit des eben eingeführten Begriffes des Fundamentalsystems beruht auf folgendem Satz:

**Satz III<sup>o</sup>)** Jedes Abel'sche Integral  $J$  ohne logarithmische Unstetigkeitspunkte läßt sich darstellen als Summe einer ganzen linearen Funktion der  $2p$  Integrale eines Fundamentalsystems mit konstanten Koeffizienten und einer algebraischen Funktion der Klasse.

Beweis: Bezeichnen  $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$  ( $\lambda = 1, \dots, p$ ) die Periodizitätsmoduln von  $J$  an  $a_\lambda, b_\lambda$ , so lauten die Bedingungen dafür, daß die Differenz

$$\Delta = J - \sum_{\lambda=1}^p [A_\lambda \cdot u_\lambda + B_\lambda \cdot t(o, \gamma_\lambda)]$$

an allen  $2p$  Querschnitten  $a_\lambda$ ,  $b_\lambda$  verschwindende Periodizitätsmoduln besitzt:

$$\alpha_\lambda = A_\lambda \cdot \pi i, \quad \lambda = 1, 2, \dots p.$$

$$\beta_\lambda - \sum_{\mu=1}^p A_\mu \cdot a_{\mu\lambda} = -2 \sum_{\mu=1}^p B_\mu \cdot u'_\lambda(\gamma_\mu), \quad \lambda = 1, 2, \dots p$$

Die ersten  $p$  Bedingungsgleichungen bestimmen  $A_1 \dots A_p$ . Die  $p$  letzten sind in  $B_1 \dots B_p$  linear und nicht homogen, und ihre Auflösungsdeterminante ist nach Voraussetzung von Null verschieden. Diese  $2p$  Bedingungsgleichungen liefern also für  $A_1 \dots A_p$ ,  $B_1 \dots B_p$  bestimmte endliche Werte, die nicht alle  $= 0$  sind und deren Einsetzen in  $\mathcal{A}$  alle  $2p$  Periodizitätsmoduln von  $\mathcal{A}$  zum Verschwinden bringt.  $\mathcal{A}$  ist dann eine algebraische Funktion  $R(s, z)$  der Klasse, d. h. es ist:

$$J = \sum_{\lambda=1}^p [A_\lambda \cdot u_\lambda + B_\lambda \cdot t(o, \gamma_\lambda)] + R(s, z), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes lassen sich in der Darstellungsformel I<sup>o</sup>) dieses Paragraphen für das allgemeine Abel'sche Integral die Integrale I. und II. Gattung ersetzen durch  $2p$  Integrale eines Fundamentalsystems. Es ergibt sich so für das allgemeine Abel'sche Integral  $J$  die Zerlegungsformel:

$$\begin{aligned} \text{II}^o) \quad J &= \int \tau dz \\ &= R(s, z) + \sum_{x=1}^{q-1} G_x \tilde{\omega}(\varepsilon_x \varepsilon_q) + \sum_{\lambda=1}^p [A_\lambda \cdot u_\lambda + B_\lambda \cdot t(o, \gamma_\lambda)], \end{aligned}$$

oder, abgekürzt:

$$\text{II}_a^o) \quad J = R(s, z) + II + T.$$

wo  $II$  nur logarithmische Unstetigkeiten aufweist, und  $T$  nur algebraische Unstetigkeiten erster Ordnung besitzt.

Für die in II<sup>o</sup>) und II<sub>a</sub><sup>o</sup>) auftretende Funktion  $R(s, z)$  der Klasse gilt noch der Satz

**Satz IV<sup>o</sup>)** Sind die  $p$  Punkte  $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_p$  ein für allemal gewählt, so ist  $R(s, z)$  vollständig bestimmt bis auf eine additive Konstante.

Beweis: Angenommen, es sei:

$$J = R_1(s, z) + \Pi_1 + T_1$$

ein auf anderem Wege gefundener Ausdruck für  $J$ , wobei  $\Pi_1$  und  $T_1$  von derselben Natur seien wie früher  $\Pi$  und  $T$ . Die Differenz

$$R(s, z) - R_1(s, z) = \Pi_1 - \Pi + T_1 - T$$

ist dann ein Integral der Klasse, das keine logarithmischen Unstetigkeiten mehr besitzt und nur mehr in Punkten der Gruppe  $\gamma_1 \dots \gamma_p$  zur ersten Ordnung algebraisch unstetig wird. Ist z. B.

$$\text{in } \gamma_\lambda (z = \zeta_\lambda): \quad R - R_1 = \frac{K_\lambda}{z - \zeta_\lambda} + \text{f. c.}, \quad (\lambda = 1, 2 \dots p)$$

so ist

$$V = R - R_1 - \sum_{\lambda=1}^p K_\lambda \cdot t(o, \gamma_\lambda)$$

ein in  $T$  überall endliches Integral, dessen Periodizitätsmoduln an  $a_\lambda$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) alle  $= 0$  sind, also eine Konstante. Die Periodizitätsmoduln von  $V$  an den  $p$  Querschnitten  $b_\lambda$  sind daher ebenfalls gleich Null, d. h. es ist:

$$\sum_{\lambda=1}^p K_\lambda \cdot u'_\mu(\gamma_\lambda) = 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2 \dots p.$$

Die Auflösungsdeterminante dieser  $p$  Gleichungen ist aber nach Voraussetzung von Null verschieden; es ist folglich:

$$K_\lambda = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2 \dots p$$

$$\text{d. h.} \quad R - R_1 = \text{constans}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die Funktion  $R(s, z)$  hat zu Unstetigkeitspunkten die Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_p$  und die Punkte, in denen die Differenz  $J - \Pi$  algebraisch unstetig wird. Die Aufgabe, diese Funktion wirklich rational durch  $s$  und  $z$  darzustellen, findet ihre Erledigung durch die Erörterungen des nächsten Kapitels.

Sind die Unstetigkeitspunkte  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_g$  von  $\tau$  gegeben und für jeden dieser Punkte die Entwicklung von  $\tau$ , soweit sie das Unstetigwerden in diesem Punkte charakterisiert; so



lassen sich die in Formel II<sup>0</sup>) auftretenden konstanten Koeffizienten  $A_1 \dots A_p$ ,  $B_1 \dots B_p$  unschwer bestimmen. Näheres hierüber findet man bei Appell und Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* p. 345—49.

Wir behandeln weiter die Aufgabe:

Anzugeben, unter welchen Bedingungen das Abel'sche Integral

$$J = \int \tau dz$$

sich auf eine algebraische Funktion der Klasse reduziert.

Die erste zu erfüllende Bedingung ist, daß alle Residuen  $G_x$  von  $\tau$  gleich Null seien. Ist diese Bedingung erfüllt, so lassen sich die weiteren Bedingungen im Anschluß an das Vorige, daraus ableiten, daß im Ausdrucke II<sup>0</sup>) für  $J$  alle Koeffizienten  $A_\lambda$  und  $B_\lambda$  gleich Null sein müssen. — Wir leiten diese weiteren Bedingungen auf einem etwas andern Wege ab.

Bezeichnen  $K_\lambda$ ,  $L_\lambda$  die Periodizitätsmoduln von  $J$  an  $a_\lambda$ ,  $b_\lambda$ , so ist das Randintegral  $\int_{(T')} u_\mu dJ = \int_{(T')} u_\mu \cdot \tau \cdot dz$

$$\text{einerseits} = \sum_{\lambda=1}^p \left( \binom{\lambda}{\mu} \pi i \cdot L_\lambda - a_{\mu\lambda} K_\lambda \right),$$

und andererseits  $= 2\pi i$  mal der Summe der Residuen von  $u_\mu \cdot \tau$  in  $T'$ ;

ebenso ist das Randintegral  $\int_{(T)} t(o, \gamma_\mu) \cdot \tau dz$  einerseits gleich

$- 2 \sum_{\lambda=1}^p u'_\lambda(\gamma_\mu) \cdot K_\lambda$  und andererseits gleich  $2\pi i$  mal der Summe der Residuen von  $t(o, \gamma_\mu) \cdot \tau$  in  $T'$ .

Soll nun  $J = \int \tau dz$  eine algebraische Funktion der Klasse sein, so müssen, außer der Bedingung  $G_x = 0$  ( $x = 1 \dots q$ ), auch noch sämtliche Periodizitätsmoduln  $K_\lambda$ ,  $L_\lambda$

von  $J$  gleich Null sein, d. h. es muß, nach dem eben Bewiesenen, die Summe aller Residuen von  $u_\mu \cdot \tau$  und die Summe aller Residuen von  $t(o, \gamma_\mu) \cdot \tau$  in  $T'$  gleich Null sein (für  $\mu = 1, 2 \dots p$ ). Sind umgekehrt diese letztern Bedingungen erfüllt, so sind auch alle  $K_\lambda, L_\lambda$  gleich Null. Ist nämlich die Summe der Residuen von  $t(o, \gamma_\mu) \cdot \tau$  in  $T'$  gleich Null für  $\mu = 1, 2 \dots p$ , so gelten die  $p$  Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^p u'_\lambda(\gamma_\mu) \cdot K_\lambda = 0, \quad \mu = 1, 2 \dots p$$

aus denen sich, da ihre Auflösungsdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} u'_1(\gamma_1) & \dots & u'_1(\gamma_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u'_p(\gamma_1) & \dots & u'_p(\gamma_p) \end{vmatrix}$$

nach Voraussetzung von Null verschieden ist, ergibt:

$$K_1 = K_2 = \dots = K_p = 0.$$

Ist außerdem auch die Summe der Residuen von  $u_\mu \cdot \tau$  in  $T'$  gleich Null für  $\mu = 1, \dots, p$ , so folgt aus den  $p$  Gleichungen:

$$\pi i \cdot L_\mu - \sum_{\lambda=1}^p a_{\mu\lambda} \cdot K_\lambda = 0 \quad \mu = 1, 2 \dots p,$$

unmittelbar:

$$L_1 = L_2 = \dots = L_p = 0.$$

Wir haben so das Resultat:

**Satz V<sup>9)</sup>** Die notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, daß ein Abel'sches Integral  $J = \int \tau dz$  sich auf eine algebraische Funktion der Klasse reduziere, sind:

- 1<sup>o)</sup> daß sämtliche Residuen von  $\tau$  Null seien;
- 2<sup>o)</sup> daß die Summe aller Residuen von  $u_\mu \cdot \tau$  ( $\mu = 1, 2 \dots p$ ) in  $T'$  gleich Null sei;
- 3<sup>o)</sup> daß die Summe aller Residuen von  $t(o, \gamma_\mu) \cdot \tau$  ( $\mu = 1, 2 \dots p$ ) in  $T'$  gleich Null sei, wenn die  $2p$  Integrale  $u_1 \dots u_p, t(o, \gamma_1), \dots, t(o, \gamma_p)$  ein Fundamentalsystem bilden.

Zum Schluß geben wir noch eine Anwendung der Formel I<sup>o</sup>) dieses Paragraphen auf die Darstellung des Logarithmus einer algebraischen Funktion der Klasse.

Es sei  $\tau$  eine algebraische Funktion der Klasse; ihre Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte, die wir der Einfachheit halber als im Endlichen gelegen und mit keinem Verzweigungspunkte zusammenfallend annehmen, seien

$$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_x \dots \varepsilon_q \text{ und } \beta_1 \dots \beta_q \dots \beta_r,$$

die zugehörigen Ordnungszahlen

$$\mu_1 \dots \mu_x \dots \mu_q \text{ und } \nu_1 \dots \nu_q \dots \nu_r.$$

Bezeichnet dann  $\tau(\alpha)$  den Wert von  $\tau$  im willkürlich angenommenen festen Punkte  $z = \alpha$ ,  $\tau(o)$  den Wert von  $\tau$  im variablen Punkte  $(s, z)$ , so ist

$$\log \frac{\tau(o)}{\tau(\alpha)} = \int_{\alpha}^o \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz} \cdot dz.$$

Die Unstetigkeiten dieses Integrals der Klasse sind leicht zu ermitteln. Ist nämlich

$$\text{in } \varepsilon_x(z = \eta_x): \tau = (z - \eta_x)^{\mu_x} [A_x + B_x(z - \eta_x) + \dots], \quad A_x \neq 0$$

so ist ebendasselbst:

$$\frac{d\tau}{dz} = (z - \eta_x)^{\mu_x - 1} \cdot [\mu_x A_x + (\mu_x + 1) B_x(z - \eta_x) + \dots],$$

und daher

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz} = \frac{\mu_x}{z - \eta_x} + \text{f. c.}$$

Ebenso ergibt sich aus der in der Umgebung von  $\beta_q(z = \zeta_q)$  gültigen Entwicklung:

$$\tau = \frac{1}{(z - \zeta_q)^{\nu_q}} \cdot [A'_q + B'_q(z - \zeta_q) + \dots],$$

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{(z - \zeta_q)^{\nu_q + 1}} [-\nu_q \cdot A'_q + (1 - \nu_q) B'_q(z - \zeta_q) + \dots],$$

und somit:

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz} = \frac{-\nu_q}{z - \zeta_q} + \text{f. c.}$$

Das Integral  $\int \frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz}$  wird daher in sämtlichen Punkten  $\epsilon_1 \dots \epsilon_q, \beta_1 \dots \beta_r$  logarithmisch unstetig, und die zugehörigen Residuen sind  $\mu_1 \dots \mu_q, -\nu_1, \dots, -\nu_r$ . Weitere Unstetigkeiten besitzt das Integral nicht. — Nach I<sup>o</sup>) gilt somit der

**Satz VI<sup>o</sup>)** Der Logarithmus einer algebraischen Funktion  $\tau$  der Klasse läßt sich darstellen in der Form:

$$\begin{aligned} \text{III}^o) \quad \log \tau &= \sum_{x=1}^q \mu_x \cdot \tilde{\omega}(\epsilon_x, \beta_r) - \sum_{q=1}^{r-1} \nu_q \cdot \tilde{\omega}(\beta_q, \beta_r) \\ &+ \sum_{\lambda=1}^p c_\lambda u_\lambda + \text{constans.} \end{aligned}$$

Die in dieser Formel auftretenden konstanten Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  sind gerade, ganze Zahlen (oder 0), wie man sogleich einsieht, wenn man berücksichtigt, daß die Periodizitätsmoduln von  $\log \tau$  an den Querschnitten  $a_1 \dots a_p$  ganzzahlige Vielfache von  $2\pi i$  sein müssen.

## § 26. Das Abel'sche Theorem.\*)

In diesem Paragraphen sollen einige für die Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale äußerst wichtige Beziehungen abgeleitet werden, die nach ihrem Entdecker mit dem gemeinsamen Namen „Abel'sches Theorem“ bezeichnet werden. Der im Folgenden gegebenen Ableitung liegt die Voraussetzung zu Grunde, daß die

---

\*) Abel, Oeuvres complètes. I. pag. 145 (1826) u. pag. 515 (1829). — Riemann, Ges. Werke pag. 116 ff. — Clebsch u. Gordan, Abel'sche Funktionen pag. 44 u. 127 (1866). — Die hier gegebene Ableitung schließt sich an die Abhandlung von Herrn H. Weber, Math. Ann. Bd. VIII, pag. 48 bis 53 an.

definierende Grundgleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  der Klasse normalisiert sei im Sinne des § 9), so daß unter anderm im Unendlichen keine Verzweigungspunkte vorhanden sind.

Es sei  $\tau$  eine Funktion der Klasse, die  
in den Punkten  $\beta_1 \dots \beta_x \dots \beta_k$  gleich Null wird zu  
den Ordnungen  $m_1, \dots, m_x, \dots, m_k$ ,  
und in den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_\varrho \dots \gamma_r$  gleich  $\infty$  zu den  
Ordnungen  $n_1 \dots n_\varrho \dots n_r$ ,  
so daß

$$\sum_{x=1}^k m_x = \sum_{\varrho=1}^r n_\varrho = q$$

ist, wenn  $q$  die Ordnung von  $\tau$  bezeichnet.

Ferner sei  $\omega$  ein Integral der Klasse, dessen Integrand  $\omega' = \frac{d\omega}{dz}$  in einem beliebigen, im Endlichen gelegenen Punkte  $\varepsilon_a$  ( $z = \zeta_a$ ), der ein  $(v_a - 1)$ facher Verzweigungspunkt von  $T$  ist, die Entwicklung:

$$1^\circ) \quad \omega' = (z - \zeta_a)^{\frac{\mu}{v_a}} \cdot [c_\mu + c_{\mu+1}(z - \zeta_a)^{\frac{1}{v_a}} + \dots],$$

( $v_a =$  einer der Zahlen  $1, 2 \dots n$ )

und in einem beliebigen der  $n \infty$  fernen Punkte  $T$  die Entwicklung:

$$2^\circ) \quad \omega' = \frac{b_\nu}{z^\nu} + \frac{b_{\nu+1}}{z^{\nu+1}} + \dots$$

besitzt. Dieser Integrand  $\omega'$  wird dann in allen denjenigen Punkten  $\varepsilon_a$  unstetig, für welche  $\mu < 0$  ist, etwa in den Punkten  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_u \dots \varepsilon_s$ , und besitzt im Unendlichen nur dann ein von Null verschiedenes Residuum, wenn  $\nu \geq 1$  ist. Letzteres möge in den Punkten  $\delta_1 \dots \delta_\sigma, \dots \delta_t$  der Fall sein.

Schließlich besitze  $\omega$  an den Querschnitten  $a_\lambda, b_\lambda$  die Periodizitätsmoduln  $A_\lambda, B_\lambda$ .

Wir bilden nun die Funktion:

$$3^\circ) \quad \Phi = \log \tau \cdot \frac{d\omega}{dz}.$$

Der zweite Faktor  $\omega' = \frac{d\omega}{dz}$  ist in  $T$  eindeutig. Der erste Faktor  $\log \tau$  ist, wie aus dem Schlufresultat des vorigen Paragraphen hervorgeht, ein Integral der Klasse, das nur logarithmische Unstetigkeitspunkte besitzt, und zwar sind das die Punkte  $\beta_x$  und  $\gamma_q$ . Dieser Faktor wird erst eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T''$ , die man erhält, wenn man in  $T'$  von dem gemeinsamen Kreuzungspunkte  $\eta$  der Querschnitte  $c_\lambda$  aus nach sämtlichen Punkten  $\beta_x$  und  $\gamma_q$  Schnitte  $l_x$  und  $l'_q$  anlegt, die weder einander noch die Schnitte  $a_\lambda$ ,  $b_\lambda$ ,  $c_\lambda$  schneiden (Fig. 36).

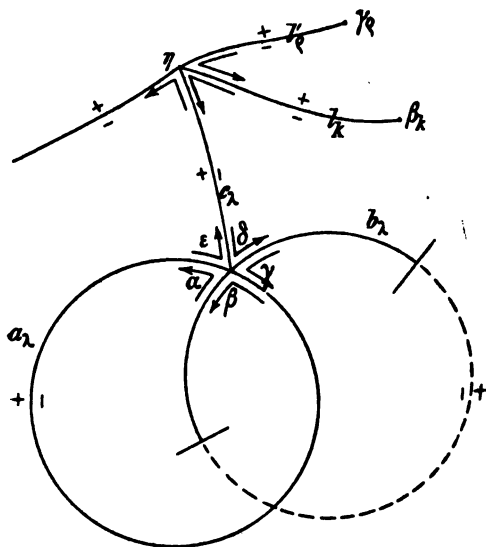


Fig. 36.

Unterscheidet man die Ränder dieser Schnitte als  $+$  und  $-$  Rand so, daß ein  $+$  Umlauf um einen der Punkte  $\beta_x$ ,  $\gamma_q$  von der negativen Seite des betreffenden Schnittes auf die positive Seite desselben führt, so hat  $\log \tau$  an  $l_x$  ( $x = 1 \dots k$ ) den Periodizitätsmodul  $m_x \cdot 2\pi i$ , und an  $l'_q$  ( $q = 1 \dots r$ ) den Periodizitätsmodul  $-n_q \cdot 2\pi i$ . Außerdem besitzt  $\log \tau$  an  $a_\lambda$ ,  $b_\lambda$  die Periodizitätsmoduln

$$2\pi i \cdot g_\lambda, \quad 2\pi i \cdot h_\lambda,$$

wo  $g_\lambda$ ,  $h_\lambda$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) ganze Zahlen bezeichnen, die vollständig definiert sind durch die Integrale

$$4^\circ) \quad 2\pi i g_\lambda = \int \left| \frac{\gamma}{\beta} \right|_\lambda d \log \tau, \quad 2\pi i \cdot h_\lambda = \int \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|_\lambda d \log \tau.$$

Wir betrachten nunmehr das Randintegral:

$$5^\circ) \quad V = \int_{(T')} \log \tau \cdot \omega' \cdot dz = \int_{(T'')} \Phi \cdot dz,$$

wo die Integration sich in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von  $T''$  erstreckt. Drückt man dieses Integral aus, einmal durch die Residuen, die der Integrand in  $T''$  besitzt, das andere Mal durch die Periodizitätsmoduln, so ergibt die Gleichsetzung der so erhaltenen Werte das allgemeine Abel'sche Theorem.

Wir bestimmen zunächst die Residuen von  $\Phi$  in  $T''$ . — Der erste Faktor  $\log \tau$  von  $\Phi$  wird in  $T''$  nicht mehr unstetig. Setzt man also voraus, daß die Punkte  $\beta_x$  und  $\gamma_e$  mit keinem der Punkte  $\varepsilon_\alpha$  und  $\delta_\sigma$  zusammenfallen, so hat  $\log \tau$  in der Umgebung der Punkte  $\varepsilon_\alpha$  und  $\delta_\sigma$  Entwicklungen von der Form:

$$5^\circ) \quad \text{für } \varepsilon_\alpha: \log \tau = C_0 + C_1 (z - \zeta_\alpha)^{\frac{1}{v_\alpha}} + C_2 (z - \zeta_\alpha)^{\frac{2}{v_\alpha}} + \dots,$$

$$6^\circ) \quad \text{für } \delta_\sigma: \log \tau = \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{z} + \frac{\Gamma_2}{z^2} + \dots$$

Im Punkt  $\varepsilon_\alpha$ , für den  $\mu < 0$  ist, hat man daher:

$$7^\circ) \quad \Phi = \left[ C_0 + C_1 (z - \zeta_\alpha)^{\frac{1}{v_\alpha}} + C_2 (z - \zeta_\alpha)^{\frac{2}{v_\alpha}} + \dots \right] \\ \cdot (z - \zeta_\alpha)^{\frac{\mu}{v}} \cdot \left[ c_\mu + c_{\mu+1} (z - \zeta_\alpha)^{\frac{1}{v}} + \dots \right].$$

Soll  $\Phi$  in  $\varepsilon_\alpha$  ein von Null verschiedenes Residuum besitzen, so muß die rechte Seite von 7°) ein Glied mit dem Nenner  $z - \zeta_\alpha$  enthalten. Da für  $-\mu < v_\alpha$  ein solches Glied in der Entwicklung von  $\Phi$  nicht auftreten kann, so hat man Residuen nur zu erwarten für  $-\mu \geq v_\alpha$ . Angenommen, es sei:

$$8^\circ) \quad -\mu = v_\alpha + \mu_\alpha \quad \text{d. h.} \quad -(\mu + \mu_\alpha) = v_\alpha,$$

wo  $\mu_\alpha$  irgend eine positive, ganze Zahl (die Null einschliesslich) bedeutet; in der Entwicklung 7<sup>o</sup>) von  $\Phi$  haben dann die Glieder mit den Koeffizienten:

$$C_0 c_{\mu+\mu_\alpha}, C_1 c_{\mu+\mu_\alpha-1}, \dots C_{\mu_\alpha} c_\mu$$

den Nenner  $z - \zeta_\alpha$ . Die Summe  $S_\alpha$  der Residuen von  $\Phi$  in  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\alpha \dots \varepsilon_s$  ist daher:

$$9^o) \quad S_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s v_\alpha (C_0 c_{\mu+\mu_\alpha} + C_1 c_{\mu+\mu_\alpha-1} + \dots + C_{\mu_\alpha} c_\mu),$$

wo  $\mu_\alpha = -(\mu + v_\alpha)$  ist.

Im Punkte  $\delta_\sigma$  hat man:

$$10^o) \quad \Phi = \left( \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{z} + \frac{\Gamma_2}{z^2} + \dots \right) \cdot \left( \frac{b_v}{z^v} + \frac{b_{v+1}}{z^{v+1}} + \dots \right).$$

Soll  $\Phi$  in diesem Punkte ein von Null verschiedenes Residuum besitzen, so muss die ganze Zahl  $v \leq 1$  sein. Angenommen, es sei

$$11^o) \quad v = 1 - v_\sigma, \quad (v_\sigma \text{ einer d. Zahlen } 0, 1, 2, \dots);$$

der Nenner  $z$ , der allein ein Residuum liefert, kommt dann vor in den Gliedern mit den Koeffizienten:

$$\Gamma_0 \cdot b_{v+v_\sigma}, \Gamma_1 \cdot b_{v+v_\sigma-1}, \dots \Gamma_{v_\sigma} b_v,$$

und die Summen  $S_\sigma$  der Residuen von  $\Phi$  in den Punkten  $\delta_1 \dots \delta_\sigma \dots \delta_t$  ist:

$$12^o) \quad S_\sigma = - \sum_{\sigma=1}^t (\Gamma_0 b_{v+v_\sigma} + \Gamma_1 b_{v+v_\sigma-1} + \dots + \Gamma_{v_\sigma} b_v),$$

wo  $v + v_\sigma = 1$  ist.

Außerhalb der Punkte  $\varepsilon_\alpha$  und  $\delta_\sigma$  besitzt  $\Phi$  in  $T''$  kein weiteres Residuum. Es ist daher:

$$1^o) \quad V = 2\pi i.$$

$$\left[ \sum_{\alpha=1}^s v_\alpha (C_0 \cdot c_{\mu+\mu_\alpha} + C_1 \cdot c_{\mu+\mu_\alpha-1} + \dots + C_{\mu_\alpha} c_\mu) - \sum_{\sigma=1}^t (\Gamma_0 \cdot b_{v+v_\sigma} + \Gamma_1 \cdot b_{v+v_\sigma-1} + \dots + \Gamma_{v_\sigma} \cdot b_v) \right].$$



Andererseits ist:

$$V = \int_{(x)} \log \tau \cdot \omega' \cdot dz + \sum_{z=1}^k \int \left| \frac{\beta}{l} \right|_x (\log^+ \tau \cdot d\omega^+ - \log^- \tau \cdot d\bar{\omega}) \\ + \sum_{\varrho=1}^r \int \left| \frac{\gamma}{l'} \right|_{\varrho} (\log^+ \tau \cdot d\omega^+ - \log^- \tau \cdot d\bar{\omega}),$$

wo:

$$\int_{(x')} \log \tau \cdot d\omega = 2\pi i \cdot \sum_{\lambda=1}^r (g_{\lambda} \cdot B_{\lambda} - h_{\lambda} \cdot A_{\lambda}), \\ \int \left| \frac{\beta}{l} \right|_x (\log^+ \tau \cdot d\omega^+ - \log^- \tau \cdot d\bar{\omega}) = \int \left| \frac{\beta}{l} \right|_x (\log^+ \tau - \log^- \tau) d\omega \\ = m_x \cdot 2\pi i \cdot \int \left| \frac{\beta}{l} \right|_{\eta} d\omega = m_x \cdot 2\pi i \cdot [\omega(\beta_x) - \omega(\eta)], \\ \int \left| \frac{\gamma}{l'} \right|_{\varrho} (\log^+ \tau \cdot d\omega^+ - \log^- \tau \cdot d\bar{\omega}) = -n_{\varrho} \cdot 2\pi i \cdot \int \left| \frac{\gamma}{l'} \right|_{\eta} d\omega \\ = -n_{\varrho} \cdot 2\pi i \cdot [\omega(\gamma_{\varrho}) - \omega(\eta)] \quad \text{ist.}$$

Berücksichtigt man daher, daß  $\Sigma m_x = \Sigma n_{\varrho}$  ist, so erhält man:

$$\text{II}^{\circ}) \quad V = 2\pi i \cdot \left[ \sum_{\lambda=1}^p (g_{\lambda} \cdot B_{\lambda} - h_{\lambda} \cdot A_{\lambda}) \right. \\ \left. + \sum_{x=1}^k m_x \cdot \omega(\beta_x) - \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho} \cdot \omega(\gamma_{\varrho}) \right].$$

Aus I<sup>o</sup>) und II<sup>o</sup>) ergibt sich:

$$\text{A}^{\circ}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{x=1}^k m_x \cdot \omega(\beta_x) - \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho} \cdot \omega(\gamma_{\varrho}) \\ & = \sum_{\lambda=1}^p (h_{\lambda} \cdot A_{\lambda} - g_{\lambda} \cdot B_{\lambda}) \\ & + \sum_{\alpha=1}^s v_{\alpha} (C_0 \cdot c_{\mu+\mu_{\alpha}} + C_1 \cdot c_{\mu+\mu_{\alpha}-1} + \dots + C_{\mu_{\alpha}} c_{\mu}) \\ & - \sum_{\sigma=1}^t (I_0 \cdot b_{\nu+\nu_{\sigma}} + I_1 \cdot b_{\nu+\nu_{\sigma}-1} + \dots + I_{\nu_{\sigma}} b_{\nu}), \end{aligned} \right.$$

worin

$$\sum_{x=1}^k m_x = \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho}, \quad 2\pi i \cdot g_{\lambda} = \int \left| \frac{\gamma}{b} \right|_{\lambda} d \log \tau,$$

$$2\pi i \cdot h_{\lambda} = \int \left| \frac{\alpha}{a} \right|_{\lambda} d \log \tau,$$

und  $\mu + \mu_{\alpha} = -v_{\alpha}$ ,  $\nu + \nu_{\sigma} = 1$  ist.

Die Beziehung A<sup>0</sup>) ist der Ausdruck für das allgemeine Abel'sche Theorem.

Sind alle Unstetigkeitspunkte und Nullpunkte von  $\tau$  von der ersten Ordnung, so sind alle Zahlen  $m_x$  und  $n_{\varrho}$  gleich 1. Bezeichnet dann  $\beta_1 \dots \beta_x \dots \beta_q$  das System der Nullpunkte,  $\gamma_1 \dots \gamma_x \dots \gamma_q$  das System der Unstetigkeitspunkte von  $\tau$ , so nimmt die linke Seite von A<sup>0</sup>) die Form

$\sum_{x=1}^q [\omega(\beta_x) - \omega(\gamma_x)]$ , wofür auch geschrieben werden kann:

$$\sum_{x=1}^q \int_{\gamma_x}^{\beta_x} d\omega.$$

Die Beziehung A<sup>0</sup>) geht dann über in:

$$\begin{aligned} A_1^0) & \quad \sum_{x=1}^q \int_{\gamma_x}^{\beta_x} d\omega \\ & = \sum_{\lambda=1}^q (h_{\lambda} A_{\lambda} - g_{\lambda} \cdot B_{\lambda}) \\ & + \sum_{\alpha=1}^p v_{\alpha} (C_0 \cdot c_{\mu+\mu_{\alpha}} + C_1 \cdot c_{\mu+\mu_{\alpha}-1} + \dots + C_{\mu_{\alpha}} \cdot c_{\mu}) \\ & - \sum_{\sigma=1}^t (\Gamma_0 \cdot b_{\nu+\nu_{\sigma}} + \Gamma_1 \cdot b_{\nu+\nu_{\sigma}-1} + \dots + \Gamma_{\nu_{\sigma}} \cdot b_{\nu}). \end{aligned}$$

Bezüglich der Konstanten  $g_{\lambda}, h_{\lambda}$  ( $\lambda = 1, \dots, p$ ) auf der rechten Seite von  $A_1$  läßt sich allgemein Folgendes aussagen.

Betrachtet man an Stelle der Funktion  $\tau$  mit den Nullpunkten  $\beta_1 \dots \beta_q$  und den Unstetigkeitspunkten  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  die Funktion

$$\tau_1 = \frac{\tau - k}{\tau - k_1},$$

wo  $k$  und  $k_1$  konstante Größen sind, so sind die Nullpunkte von  $\tau_1$  die  $q$  Punkte, in denen  $\tau = k$ , und die Unstetigkeitspunkte die  $q$  Punkte, in denen  $\tau = k_1$  wird. Bezeichnet man diese Punkte wieder mit  $\beta_1 \dots \beta_q$  und  $\gamma_1 \dots \gamma_q$ , so ändern sich diese Punkte stetig, wenn  $k$  und  $k_1$  sich stetig ändern. Setzt man zunächst  $k = k_1$ , so fallen die Punkte  $\beta_x$  mit den entsprechenden Punkten  $\gamma_x$  zusammen, und die  $g_\lambda, h_\lambda$  werden  $= 0$ , wenn man in  $A_1^{(0)}$  die Integrationswege von  $\gamma_x$  nach  $\beta_x$  auf Null reduziert. Läßt man von da an  $k$  sich stetig ändern, so ändern auch die Punkte  $\beta_x$  stetig ihre Lage, und die Zahlen  $g_\lambda, h_\lambda$  bilden so lange  $= 0$ , bis einer der Punkte  $\beta_x$  einen Querschnitt überschreitet, wenn nur dabei als Integrationswege die simultanen Wege gewählt werden, auf denen die Punkte  $\beta_x$  bei der Änderung von  $k$  vorrücken.

Die ganzen Zahlen  $g_\lambda, h_\lambda$  sind also unabhängig von  $\omega$  und hängen im allgemeinen ab von der Natur der Funktion  $\tau$  und von der Lage der Querschnitte. Legt man in  $A_1^{(0)}$  den Integrationswegen die Beschränkung auf, die Querschnitte  $a_\lambda, b_\lambda$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) nicht zu überschreiten, so sind alle  $g_\lambda, h_\lambda$  gleich Null. Läßt man die Integrationswege beliebig in  $T'$  verlaufen, ohne Rücksicht auf die Querschnitte, so kann man den Zahlen  $g_\lambda, h_\lambda$  beliebige ganze Zahlenwerte erteilen.

Aus  $A^{(0)}$  resp.  $A_1^{(0)}$  lassen sich durch Spezialisierung von  $\omega$  mehrere Beziehungen spezieller Natur ableiten.

I<sup>0</sup>) Es sei  $\omega$  ein Normalintegral I. Gattung  $u_i$ . Dann ist:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ i \end{pmatrix} \pi i, \quad B_\lambda = a_{i\lambda},$$

$$-\mu = v_\alpha - 1, \quad \nu = 2,$$

und die Beziehung  $A^{(0)}$  resp.  $A_1^{(0)}$  geht über in:

$$\begin{aligned}
 B^0) \quad & \sum_{x=1}^k m_x \cdot u_i(\beta_x) - \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho} \cdot u_i(\gamma_{\varrho}) \\
 & = \pi i \cdot h_i - \sum_{\lambda=1}^p g_{\lambda} \cdot a_{i\lambda}, \quad (i = 1, 2 \dots p),
 \end{aligned}$$

resp.

$$B_{1'}^0) \quad \sum_{x=1}^q \int_{\gamma_x}^{\beta_x} du_i = \pi i \cdot h_i - \sum_{\lambda=1}^p g_{\lambda} \cdot a_{i\lambda}, \quad (i = 1, 2 \dots p),$$

Legt man den Integrationswegen in  $B_{1'}^0)$  die Beschränkung auf, die Querschnitte  $a_{\lambda}, b_{\lambda}$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) nicht zu überschreiten, so geht  $B_{1'}^0)$  über in die einfachere Gleichung:

$$B_{2'}^0) \quad \sum_{x=1}^q \int_{\gamma_x}^{\beta_x} du_i = 0, \quad \text{für } i = 1, 2 \dots p.$$

II<sup>o</sup>) Es sei  $\omega$  ein Normalintegral III. Gattung  $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . — In diesem Falle wird der Integrand  $\frac{d\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{dz}$  nur unstetig in  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , und es ist

$$\begin{aligned}
 \text{in } \varepsilon_1: \quad & \frac{d\tilde{\omega}}{dz} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \text{f. c.}, \\
 \text{in } \varepsilon_2: \quad & \frac{d\tilde{\omega}}{dz} = -\frac{1}{z - \zeta_2} + \text{f. c.},
 \end{aligned}$$

wo  $\zeta_1, \zeta_2$  die Werte von  $z$  in  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  bezeichnen. Es ist daher:

$$\text{für } \varepsilon_1: \quad v_1 = 1, \quad \mu = -1, \quad \text{d. h. } \mu_1 = 0, \quad c_{\mu} = 1,$$

$$\text{für } \varepsilon_2: \quad v_2 = 1, \quad \mu = -1, \quad \text{d. h. } \mu_2 = 0, \quad c_{\mu} = -1.$$

Ferner ist:  $\nu = 2$ ,  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 2[u_1(\varepsilon_1) - u_1(\varepsilon_2)]$ . — Die Beziehungen  $A^0)$  resp.  $A_{1'}^0)$  gehen somit, wenn man außerdem berücksichtigt, daß

$$C_{01} = \log \tau(\varepsilon_1), \quad C_{02} = \log \tau(\varepsilon_2)$$

ist, über in:

$$C_0^{(0)} \quad \sum_{x=1}^k m_x \cdot \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)_{\beta_x} - \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho} \cdot \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)_{\gamma_{\varrho}}$$

$$= -2 \sum_{\lambda=1}^p g_{\lambda} [u_{\lambda}(\varepsilon_1) - u_{\lambda}(\varepsilon_2)] + \log \frac{\tau(\varepsilon_1)}{\tau(\varepsilon_2)},$$

resp.

$$C_1^{(0)} \quad \sum_{x=1}^q \int_{\gamma_x}^{\beta_x} d\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$= -2 \cdot \sum_{\lambda=1}^p g_{\lambda} [u_{\lambda}(\varepsilon_1) - u_{\lambda}(\varepsilon_2)] + \log \frac{\tau(\varepsilon_1)}{\tau(\varepsilon_2)}.$$

Führt man an Stelle der Funktion  $\tau$  die Funktion

$$\frac{\tau - k}{\tau - k_1}$$

ein, und bezeichnet man die Null- und Unstetigkeitspunkte dieser Funktion wieder mit  $\beta_1 \dots \beta_q$  resp.  $\gamma_1 \dots \gamma_q$ , so geht  $C_1^{(0)}$  über in:

$$C_2^{(0)} \quad \sum_{x=1}^q \int_{\gamma_x}^{\beta_x} d\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -2 \sum_{\lambda=1}^p g_{\lambda} [u_{\lambda}(\varepsilon_1) - u_{\lambda}(\varepsilon_2)]$$

$$+ \log \cdot \left[ \frac{\tau(\varepsilon_1) - k}{\tau(\varepsilon_1) - k_1} \cdot \frac{\tau(\varepsilon_2) - k_1}{\tau(\varepsilon_2) - k} \right].$$

Legt man hierin den Integrationswegen links die Beschränkung auf, die Querschnitte  $b_{\lambda}$  nicht zu überschreiten, so ergibt sich

$$C_3^{(0)} \quad \sum_{x=1}^q \int_{\gamma_x}^{\beta_x} d\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \log \frac{\tau(\varepsilon_1) - \tau(\beta)}{\tau(\varepsilon_1) - \tau(\gamma)} \cdot \frac{\tau(\varepsilon_2) - \tau(\gamma)}{\tau(\varepsilon_2) - \tau(\beta)},$$

wo  $\tau(\beta) = k$ ,  $\tau(\gamma) = k_1$  ist.

Sind speziell die Punkte  $\gamma_x$  die Unstetigkeitspunkte von  $\tau$ , so erhält man:

$$C_4^{(0)} \quad \sum_{x=1}^q \int_{\gamma_x}^{\beta_x} d\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \log \frac{\tau(\varepsilon_1) - \tau(\beta)}{\tau(\varepsilon_2) - \tau(\beta)},$$

und schliesslich, bei Anwendung des Vertauschungssatzes von Argument und Parameter:

$$D^0) \quad \sum_{x=1}^q \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} d\tilde{\omega}(\beta_x, \gamma_x) = \log \frac{\tau(\varepsilon_1) - \tau(\beta)}{\tau(\varepsilon_2) - \tau(\beta)}.$$

In dieser letztern Form wird später das Abel'sche Theorem für Normalintegrale III. Gattung zur Lösung des Umkehrproblems benutzt werden.

Nimmt man in A<sup>0</sup>) resp. A<sub>1</sub><sup>0</sup>) für  $\omega$  ein Normalintegral II. Gattung, so erhält man ebenfalls eine Beziehung spezieller Natur, das Abel'sche Theorem für Integrale II. Gattung. Da diese Beziehung an Bedeutung hinter den Beziehungen B<sup>0</sup>), C<sup>0</sup>) und D<sup>0</sup>) weit zurücksteht und auch im folgenden nicht zur Anwendung kommt, leiten wir dieselbe hier nicht ab und verweisen für sie etwa auf Stahl, Abel'sche Funktionen, § 19.

---

## Kapitel IV.

# Funktionen und Punktsysteme der Klasse.

### § 27. Umkehrung des Abel'schen Theorems für Integrale I. Gattung.

Im vorigen Paragraphen ist nachgewiesen worden, daß wenn eine Funktion  $\tau$  der Klasse in den Punkten  $\beta_1 \dots \beta_x \dots \beta_k$  Null wird zu den Ordnungen  $m_1 \dots m_x \dots m_k$ , und  $\infty$  zu den Ordnungen  $n_1 \dots n_q \dots n_r$  in den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r$  wobei  $\Sigma m_x = \Sigma n_q = q$  die Ordnung von  $\tau$  bezeichnet, die  $p$  Beziehungen:

$$1^0) \quad \sum_{x=1}^k m_x \cdot u_i(\beta_x) - \sum_{q=1}^r n_q \cdot u_i(\gamma_q) = \pi i \cdot h_i - \sum_{\lambda=1}^p g_\lambda \cdot a_{i\lambda}$$

$$(i = 1, 2 \dots p)$$

bestehen, wo  $u_i$  dasjenige Normalintegral I. Gattung bedeutet, das an  $a_\lambda, b_\lambda$  die Periodizitätsmoduln  $\binom{\lambda}{i} \pi i, a_{i\lambda}$  besitzt, und  $g_\lambda, h_\lambda$  ganze Zahlen sind, die definiert sind durch die Integrale:

$$2\pi i \cdot g_\lambda = \int \left| \frac{\gamma}{\beta} \right|_{\lambda} d \log \tau, \quad 2\pi i \cdot h_\lambda = \int \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|_{\lambda} d \log \tau.$$

Dieser spezielle, im allgemeinen Abel'schen Theorem enthaltene Satz ist vor allen andern wichtig wegen seiner Umkehrbarkeit. Es gilt nämlich der

**Satz 1°)** Sind für zwei Punktsysteme

$$\beta_1 \dots \beta_x \dots \beta_k,$$

$$\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r,$$

von denen das erste den Punkt  $\beta_x$  allgemein  $m_x$ -mal, das zweite den Punkt  $\gamma_q$  allgemein  $n_q$ -mal enthält, wobei  $\Sigma m_x = \Sigma n_q$  ist, die  $p$  Beziehungen 1°) erfüllt, worin  $g_\lambda, h_\lambda$  ganze Zahlen bedeuten, so giebt es eine algebraische Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q = \Sigma m_x = \Sigma n_q$ , die in den Punkten  $\beta_x$  ( $x = 1, \dots, k$ ) gleich  $0^{m_x}$  und in den Punkten  $\gamma_q$  ( $q = 1, \dots, r$ ) gleich  $\infty^{n_q}$  wird.

Beweis: Wir bilden die ExponentialgröÙe

$$2^\circ) \quad \tau = e^J,$$

wo

$$3^\circ) \quad J = \sum_{x=1}^k m_x \cdot \tilde{\omega}(\beta_x, \gamma_r) - \sum_{q=1}^{r-1} n_q \cdot \tilde{\omega}(\gamma_q, \gamma_r) \\ + 2 \sum_{\lambda=1}^p g_\lambda \cdot u_\lambda + \text{constans}$$

ist, und untersuchen das Verhalten von  $\tau$  in  $T'$ .

Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte von  $\tau$  sind nur dort zu erwarten, wo der Exponent  $J$  unendlich wird, d. h. in den Punkten  $\beta_x$  und  $\gamma_q$ .

1°) in  $\beta_x$  ( $z = z_x$ ) wird nur ein Integral  $\tilde{\omega}$  unstetig, und zwar ist dort:

$$\tilde{\omega}(\beta_x, \gamma_q) = \log(z - z_x) + \text{f. c.},$$

und daher:

$$J = m_x \cdot \log(z - z_x) + \text{f. c.},$$

$$\tau = (z - z_x)^{m_x} \cdot e^{\text{f. c.}},$$

d. h.  $\tau$  verschwindet in  $\beta_1 \dots \beta_x \dots \beta_k$  zu den Ordnungen  $m_1 \dots m_x \dots m_k$ .

2°) in  $\gamma_q$  ( $z = z_q$ ) ist:

$$\tilde{\omega}(\gamma_q, \gamma_r) = \log(z - z_q) + \text{f. c.}, \quad (q = 1, 2, r-1)$$



und daher

$$J = -n_q \cdot \log(z - z_q) + \text{f. c.},$$

$$\tau = (z - z_q)^{-n_q} \cdot e^{\text{f. c.}},$$

d. h.  $\tau$  wird in den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_{r-1}$  gleich  $\infty$  zu den Ordnungen  $n_1 \dots n_q \dots n_{r-1}$ .

3<sup>o</sup>) im Punkte  $\gamma_r (z = z_r)$  ist:

$$\begin{aligned} J &= -\log(z - z_r) \cdot \sum_{x=1}^k m_x + \log(z - z_r) \cdot \sum_{q=1}^{r-1} n_q \\ &= -\log(z - z_r) \cdot \left[ \sum_{x=1}^k m_x - \sum_{q=1}^{r-1} n_q \right] = -n_r \cdot \log(z - z_r), \end{aligned}$$

und daher:

$$\tau = (z - z_r)^{-n_r} \cdot e^{\text{f. c.}},$$

d. h.  $\tau$  wird in  $\gamma_r$  unendlich zur Ordnung  $n_r$ .

Ein Teil unserer Behauptung ist hiermit als richtig erwiesen. Es bleibt nur noch das Verhalten von  $\tau$  an den Querschnitten von  $T''$  zu untersuchen.

$J$  ist eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T''$ , die man erhält, wenn man in  $T'$  vom gemeinsamen Kreuzungspunkte  $\eta$  der Schnitte  $c_1 \dots c_p$  aus Schnitte  $l_1 \dots l_x \dots l_k, l'_1 \dots l'_q \dots l'_r$  nach den logarithmischen Unstetigkeitspunkten anlegt. In  $T''$  ist nun:

$$1^o) \text{ an } a_i (i = 1 \dots p): \quad \overset{+}{\omega} = \bar{\omega},$$

$$\overset{+}{J} - \bar{J} = 2g_i \cdot \pi i,$$

und daher, da  $g_i$  eine ganze Zahl sein soll:  $\overset{+}{\tau} = \bar{\tau}$ .

2<sup>o</sup>) an  $b_i (i = 1, \dots, p)$ :

$$\overset{+}{\omega}(\beta_x, \gamma_r) - \bar{\omega}(\beta_x, \gamma_r) = 2[u_i(\beta_x) - u_i(\gamma_r)],$$

$$\overset{+}{\omega}(\gamma_q, \gamma_r) - \bar{\omega}(\gamma_q, \gamma_r) = 2 \cdot [u_i(\gamma_q) - u_i(\gamma_r)],$$

$$\overset{+}{u}_\lambda - \bar{u}_\lambda = a_{i\lambda},$$

und daher:

$$\begin{aligned} \overset{+}{J} - \bar{J} &= 2 \sum_{x=1}^k m_x [u_i(\beta_x) - u_i(\gamma_r)] \\ &\quad - 2 \sum_{\varrho=1}^{r-1} n_{\varrho} [u_i(\gamma_{\varrho}) - u_i(\gamma_r)] + 2 \sum_{\lambda=1}^p g_{\lambda} a_{i\lambda} \\ &= 2 \sum_{x=1}^k m_x \cdot u_i(\beta_x) - 2 \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho} \cdot u_i(\gamma_{\varrho}) + 2 \sum_{\lambda=1}^p g_{\lambda} a_{i\lambda} \\ &= 2\pi i \cdot h_i, \end{aligned}$$

d. h.

$$\overset{+}{\tau} = \bar{\tau}.$$

$$3^0) \text{ an } l_x: \quad \overset{+}{J} - \bar{J} = -m_x \cdot 2\pi i, \text{ d. h. } \overset{+}{\tau} = \bar{\tau},$$

$$,, \quad l'_{\varrho} (\varrho = 1, \dots, r): \quad \overset{+}{J} - \bar{J} = -n_{\varrho} \cdot 2\pi i, \text{ d. h. } \overset{+}{\tau} = \bar{\tau}.$$

Die Funktion  $\tau$  ist somit in  $T$  eindeutig; ihre Null- und Unstetigkeitspunkte sind die in endlicher Anzahl vorhandenen Punkte  $\beta_x$  und  $\gamma_{\varrho}$ , und die Ordnung des Null- und Unstetigwerdens von  $\tau$  in diesen Punkten ist eine endliche.  $\tau$  ist daher eine Funktion der Klasse mit den im Satz I<sup>o</sup>) ausgesprochenen Eigenschaften.

Ein Punktsystem, in dessen einzelnen Punkten eine Funktion  $\tau$  der Klasse zur ersten oder zu einer höheren Ordnung Null wird, nennen wir mit Christoffel ein Punktsystem der Klasse. Dieselbe Bezeichnung benutzen wir auch für das System der Unstetigkeitspunkte von  $\tau$ , und nennen das System der Nullpunkte und das der Unstetigkeitspunkte von  $\tau$  zusammengehörige Punktsysteme der Klasse. — Mit Anwendung dieser Ausdrucksweise können wir nunmehr den fundamentalen Satz aussprechen:

**Satz II<sup>o</sup>)** Die  $p$  Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^k m_x \cdot u_i(\beta_x) - \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho} \cdot u_i(\gamma_{\varrho}) &= \pi i \cdot h_i - \sum_{\lambda=1}^p g_{\lambda} a_{i\lambda}, \\ (i &= 1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

worin  $\sum_{x=1}^k m_x = \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho} = q$  ist, und die Größen  $m_x, n_{\varrho}, g_{\lambda}, h_i$  ganze Zahlen bedeuten, sind die

notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, daß die Punktsysteme  $\beta_1 \dots \beta_x \dots \beta_k$  und  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r$ , von denen das erste den Punkt  $\beta_x$  allgemein  $m_x$ -mal, das zweite den Punkt  $\gamma_q$  allgemein  $n_q$ -mal enthält, zusammengehörige Punktsysteme der Klasse sind.

Denkt man sich das Abel'sche Theorem für Normalintegrale I. Gattung  $u$  in der Form:

$$4^0) \quad \sum_{x=1}^q u(\beta_x) \equiv \sum_{x=1}^q u(\gamma_x)$$

geschrieben, wo das Kongruenzzeichen  $\equiv$  andeuten soll, daß die linke Seite gleich der rechten ist bis auf ein System von Simultanperioden von  $u$ , so läßt sich der vorige Satz auch aussprechen, wie folgt:

**Satz III<sup>0</sup>)** Das Punktsystem  $\beta_1 \dots \beta_x \dots \beta_q$  ist dann und nur dann ein Punktsystem der Klasse, wenn die Kongruenz 4<sup>0</sup>) durch ein mit  $\beta_1 \dots \beta_q$  nicht identisches Punktsystem  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  erfüllt werden kann.

Wo es nicht auf Systeme von Simultanperioden von  $u$  ankommt, läßt sich also die Summe  $\sum_{x=1}^q u(\beta_x)$  ersetzen durch

$\sum_{x=1}^q u(\gamma_x)$ . In diesem Sinne nennt Herr Rost (Theorie der Riemann'schen  $\mathfrak{P}$ -Funktion, pag. 24<sup>0</sup>) ein Punktsystem  $\beta_1 \dots \beta_q$ , das den Bedingungen des vorigen Satzes genügt, ein ersetzbares Punktsystem.\*)

Die Sätze II<sup>0</sup>) und III<sup>0</sup>) dieses Paragraphen liefern ein erstes Kriterium für Punktsysteme der Klasse.

---

\*) Trotz des in dieser Bezeichnung liegenden Hinweises auf die im obigen Satze ausgesprochene grundlegende Eigenschaft des Punktsystems  $\beta_1 \dots \beta_q$ , werden wir im Folgenden der von Christoffel benutzten Bezeichnung „Punktsystem der Klasse“ den Vorzug geben, da sie sich in natürlicher Weise an die allgemein übliche Bezeichnung „Funktion der Klasse“ anlehnt.

**§ 28. Darstellung der Funktionen der Klasse;  
zweites Kriterium für Punktsysteme der Klasse.**

Das Punktsystem  $\gamma_1 \dots \gamma_\varrho \dots \gamma_r$ , das allgemein den Punkt  $\gamma_\varrho$   $n_\varrho$ -mal enthält, sei das System der Unstetigkeitspunkte einer Funktion  $\tau$  der Klasse, und zwar sei:

1<sup>o</sup>) in  $\gamma_\varrho$  ( $z = \zeta_\varrho, s = \sigma_\varrho$ ):

$$\tau = \frac{R_\varrho^{(1)}}{z - \zeta_\varrho} + \frac{R_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} + \dots + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho}} + f. c. \dots$$

Bezeichnet dann  $\psi(o, \varepsilon)$  den Integranden  $\frac{\Phi(o, \varepsilon)}{F''(s, z)}$  in  $E^0$ ,

§ 22, so ist das Produkt:

$$2^o) \quad V = \tau \cdot \psi(o, \varepsilon)$$

eine Funktion der Klasse, deren Residuen sich leicht bestimmen lassen. Es ist nämlich:

1<sup>o</sup>) in  $\varepsilon$  ( $z = \zeta$ ):

$$\lim (z - \zeta) \cdot \psi(o, \varepsilon) = 1,$$

$$\lim \tau(o) = \tau(\varepsilon),$$

und daher

$$V = \frac{\tau(\varepsilon)}{z - \zeta} + f. c.,$$

d. h.

$$\text{Res}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon).$$

2<sup>o</sup>) in  $\gamma_\varrho$  ( $z = \zeta_\varrho, s = \sigma_\varrho$ ):

$$\psi = \psi(\gamma_\varrho, \varepsilon) + (z - \zeta_\varrho) \cdot \psi'(\gamma_\varrho, \varepsilon)$$

$$+ \frac{(z - \zeta_\varrho)^2}{2!} \psi''(\gamma_\varrho, \varepsilon) + \dots + \frac{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho - 1}}{(n_\varrho - 1)!} \psi^{(n_\varrho - 1)}(\gamma_\varrho, \varepsilon) + f. c.,$$

und daher:

$$\text{Res}(\gamma_\varrho) = R_\varrho^{(1)} \cdot \psi(\gamma_\varrho, \varepsilon) + R_\varrho^{(2)} \cdot \psi'(\gamma_\varrho, \varepsilon)$$

$$+ \frac{R_\varrho^{(3)}}{2!} \psi''(\gamma_\varrho, \varepsilon) + \dots + \frac{R_\varrho^{(n_\varrho)}}{(n_\varrho - 1)!} \psi^{(n_\varrho - 1)}(\gamma_\varrho, \varepsilon).$$

Im Endlichen kommen weitere Residuen von  $V$  nicht vor. — Im Unendlichen ist:

3<sup>o</sup>) In  $\infty_x$ :

$$\lim z \cdot \tau \cdot \Psi(0, \varepsilon) = \frac{1}{n} \cdot \lim \tau = \frac{1}{n} \cdot \tau(\infty_x),$$

und daher:

$$\text{Res}(\infty_x) = -\frac{1}{n} \cdot \tau(\infty_x), \quad (x = 1, 2 \dots n).$$

Berücksichtigt man nun, daß die Summe aller Residuen von  $V$  gleich Null ist, so erhält man die Beziehung:

$$\begin{aligned} \tau(\varepsilon) + \sum_{\rho=1}^r [R_{\rho}^{(1)} \cdot \Psi(\gamma_{\rho}, \varepsilon) + \dots \\ + \frac{R_{\rho}^{(n_{\rho})}}{(n_{\rho}-1)!} \Psi^{(n_{\rho}-1)}(\gamma_{\rho}, \varepsilon)] - \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^n \tau(\infty_x) = 0, \end{aligned}$$

oder, da nach Früherem der Punkt  $\varepsilon$  beliebig angenommen werden kann:

$$\begin{aligned} \text{I}^o) \quad \tau(0) = C - \sum_{\rho=1}^r [R_{\rho}^{(1)} \cdot \Psi(\gamma_{\rho}, 0) \\ + \frac{R_{\rho}^{(2)}}{1!} \Psi'(\gamma_{\rho}, 0) + \frac{R_{\rho}^{(3)}}{2!} \Psi''(\gamma_{\rho}, 0) + \dots + \frac{R_{\rho}^{(n_{\rho})}}{(n_{\rho}-1)!} \Psi^{(n_{\rho}-1)}(\gamma_{\rho}, 0)], \end{aligned}$$

$$\text{wo} \quad C = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^n \tau(\infty_x),$$

$$\text{und allgemein } \Psi^{(k)}(\gamma_{\rho}, 0) = \frac{\partial^k}{\partial \zeta_{\rho}^k} \left( \frac{\Phi(\gamma_{\rho}, 0)}{F'(\sigma_{\rho}, \zeta_{\rho})} \right) \text{ ist.}$$

Diese Formel liefert, falls die Unstetigkeitspunkte  $\gamma_1 \dots \gamma_{\rho} \dots \gamma_r$  bekannt sind, einen algebraischen Ausdruck für  $\tau$ . Vorausgesetzt ist jedoch bei der vorhergehenden Ableitung, daß alle Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_r$  im Endlichen liegen.

Eine andere Darstellungsform für  $\tau$  ergibt sich auf folgende Weise. Es sei wieder:

$$\text{in } \gamma_{\rho}(z = \zeta_{\rho}): \tau = \sum_{\sigma=1}^{n_{\rho}} \frac{R_{\rho}^{(\sigma)}}{(z - \zeta_{\rho})^{\sigma}} + \text{f. c.}, \quad (\rho = 1, 2 \dots r).$$

Nimmt man hierzu den allgemeinen Integranden I. Gattung  $w'$ , der in der Umgebung  $\gamma_\rho$  die Entwicklung:

$$\begin{aligned} 3^0) \quad w' &= w'(\gamma_\rho) + \frac{z - \zeta_\rho}{1!} w''(\gamma_\rho) + \frac{(z - \zeta_\rho)^2}{2!} w'''(\gamma_\rho) + \dots \\ &+ \frac{(z - \zeta_\rho)^{n_\rho - 1}}{(n_\rho - 1)!} w^{(n_\rho)}(\gamma_\rho) + \dots \end{aligned}$$

besitzt, so erhält man, wenn man beachtet, daß die Funktion der Klasse

$$4^0) \quad \tau \cdot w'$$

die Residuensumme Null hat, die Beziehung:

$$\begin{aligned} \text{II}^0) \quad \sum_{\rho=1}^r \left[ R_\rho^{(1)} w'(\gamma_\rho) + \frac{R_\rho^{(2)}}{1!} w''(\gamma_\rho) + \frac{R_\rho^{(3)}}{2!} w^{(3)}(\gamma_\rho) + \dots \right. \\ \left. + \frac{R_\rho^{(n_\rho)}}{(n_\rho - 1)!} w^{(n_\rho)}(\gamma_\rho) \right] = 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin  $w'$  der Reihe nach durch die  $p$  Normalintegranden I. Gattung  $u'_1 \dots u'_x \dots u'_p$ , so ergeben sich die  $p$  Relationen:

$$\begin{aligned} \text{II}_x^0) \quad \sum_{\rho=1}^r \left[ R_\rho^{(1)} \cdot u'_x(\gamma_\rho) \right. \\ \left. + \frac{R_\rho^{(2)}}{1!} u''_x(\gamma_\rho) + \dots + \frac{R_\rho^{(n_\rho)}}{(n_\rho - 1)!} u_x^{(n_\rho)}(\gamma_\rho) \right] = 0, \quad (x = 1, 2 \dots p). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen läßt sich der Darstellungsformel für  $\tau$  eine andere Gestalt geben. — Wir haben früher (§ 23, 9<sup>0</sup>) für das definitiv normierte Integral II. Gattung, das in einem Punkte  $\gamma$  ( $z = \zeta$ ,  $s = \sigma$ ) zur  $\nu^{\text{ten}}$  Ordnung algebraisch unstetig wird, den Ausdruck abgeleitet:

$$t^{(\nu)}(o, \gamma) = \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^p A_\lambda(o) \cdot u_\lambda^{(\nu)}(\gamma) - \varphi^{(\nu-1)}(\gamma, o),$$

$$\text{wo} \quad \varphi^{(\nu-1)}(\gamma, o) = \frac{d^{\nu-1}}{d\zeta^{\nu-1}} \left( \frac{\Phi(\gamma, o)}{F'(\sigma, \zeta)} \right) \text{ ist. —}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\varrho=1}^r \left[ R_{\varrho}^{(1)} \cdot t^{(1)}(o, \gamma_{\varrho}) + \frac{R_{\varrho}^{(2)}}{1!} t^{(2)}(o, \gamma_{\varrho}) + \frac{R_{\varrho}^{(2)}}{2!} t^{(3)}(o, \gamma_{\varrho}) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{R_{\varrho}^{(n_{\varrho})}}{(n_{\varrho}-1)!} t^{(n_{\varrho})}(o, \gamma_{\varrho}) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda=1}^p A_{\lambda}(o) \cdot \left[ \sum_{\varrho=1}^r \left\{ R_{\varrho}^{(1)} \cdot u'_{\lambda}(\gamma_{\varrho}) + \frac{R_{\varrho}^{(2)}}{1!} u''_{\lambda}(\gamma_{\varrho}) + \dots \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{R_{\varrho}^{(n_{\varrho})}}{(n_{\varrho}-1)!} u^{(n_{\varrho})}_{\lambda}(\gamma_{\varrho}) \right\} \right] \\
 &- \sum_{\varrho=1}^r \left[ R_{\varrho}^{(1)} \cdot \psi(\gamma_{\varrho}, o) + \frac{R_{\varrho}^{(2)}}{1!} \psi'(\gamma_{\varrho}, o) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{R_{\varrho}^{(n_{\varrho})}}{(n_{\varrho}-1)!} \cdot \psi^{(n_{\varrho}-1)}(\gamma_{\varrho}, o) \right].
 \end{aligned}$$

Wendet man dies auf I<sup>0</sup>) an, und berücksichtigt dabei die Beziehungen II<sub>\*</sub><sup>0</sup>), so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \text{III}^0) \quad \tau(o) &= C + \sum_{\varrho=1}^r \left[ R_{\varrho}^{(1)} \cdot t^{(1)}(o, \gamma_{\varrho}) \right. \\
 &+ \frac{R_{\varrho}^{(2)}}{1!} t^{(2)}(o, \gamma_{\varrho}) + \frac{R_{\varrho}^{(3)}}{2!} t^{(3)}(o, \gamma_{\varrho}) + \dots + \frac{R_{\varrho}^{(n_{\varrho})}}{(n_{\varrho}+1)!} t^{(n_{\varrho})}(o, \gamma_{\varrho}) \left. \right].
 \end{aligned}$$

Diese zweite wichtige Darstellungsformel drückt im Gegensatz zu I<sup>0</sup>), die Funktion  $\tau$  der Klasse durch transcendente Funktionen, die definitiv normierten Integrale II. Gattung, aus, hat aber den grossen Vorzug, die Unstetigkeitspunkte von  $\tau$  in vollkommen durchsichtiger Form anzugeben.

Für die Formel III<sup>0</sup>) ist es wesentlich, dass die Grössen  $R_{\varrho}^{(\sigma)}$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, n_{\varrho}$ ) den Bedingungen II<sub>\*</sub><sup>0</sup>) genügen. Sind umgekehrt diese Bedingungen II<sub>\*</sub><sup>0</sup>) so erfüllt, dass nicht alle

$R_\rho = 0$  sind, so stellt die rechte Seite von III<sup>0</sup>) eine Funktion dar, die gemäß 7<sup>0</sup>) § 23 im Punkte  $\gamma_\rho$  die Entwicklung:

$$\frac{R_\rho^{(1)}}{z - \zeta_\rho} + \frac{R_\rho^{(2)}}{(z - \zeta_\rho)^2} + \dots + \frac{R_\rho^{(n_\rho)}}{(z - \zeta_\rho)^{n_\rho}} + \text{f. c.}$$

besitzt und außerdem zufolge der Periodizitätseigenschaften der  $t^{(v)}$  an allen Querschnitten  $a_\lambda, b_\lambda$  den Periodizitätsmodul Null besitzt, also eine Funktion der Klasse ist. Dies giebt den

**Satz I<sup>0</sup>)** Bezeichnet

$$\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$$

ein beliebig in  $T$  angenommenes Punktsystem, das allgemein den Punkt  $\gamma_\rho$   $n_\rho$ -mal enthält, so giebt es dann und nur dann eine Funktion  $\tau$  der Klasse, deren System von Unstetigkeitspunkten aus sämtlichen Punkten  $\gamma_\rho$  oder aus einem Teile derselben besteht, wenn die  $p$  Beziehungen II<sup>0</sup>) durch Größen  $R_\rho^{(\sigma)}$  befriedigt werden können, die nicht alle Null sind.

Dieser Satz liefert ein zweites Kriterium für Punktsysteme der Klasse.

Zum Schlusse leiten wir noch eine dritte für das Folgende wichtige Darstellungsform für  $\tau$  ab.\*)

Es sei wieder  $\tau$  eine Funktion der Klasse mit den Unstetigkeitspunkten  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  und den zugehörigen Entwicklungen:

$$\text{in } \gamma_\rho (z = \zeta_\rho): \tau = \sum_{\sigma=1}^{n_\rho} \frac{R_\rho^{(\sigma)}}{(z - \zeta_\rho)^{n_\rho}} + \text{f. c.}, \quad (\rho = 1, 2 \dots r).$$

Wir bilden die zwei Integrale der Klasse:

$$5^0) \left\{ \begin{array}{l} J_1 = \int \tau \cdot w' \cdot dz \\ J_2 = \sum_{\rho=1} [A_\rho^{(0)} \cdot P(o, \gamma_\rho) + A_\rho^{(1)} \cdot t^{(1)}(o, \gamma_\rho) + \dots \\ \quad + A_\rho^{(n_\rho-1)} \cdot t^{(n_\rho-1)}(o, \gamma_\rho)], \end{array} \right.$$

\*) Siehe Christoffel, Brioschi's Annalen, Bd. X. 1880.



wo  $w'$  ein beliebig angenommener, allgemeiner Integrand I. Gattung,  $P(o, \gamma_\rho)$  das in  $H^0$  § 22 definierte Integral ist, und die Größen  $A_\rho^{(0)}, A_\rho^{(1)}, \dots, A_\rho^{(n_\rho-1)}$  definiert sind durch die Gleichungen:

$$6^0) \left\{ \begin{aligned} A_\rho^{(0)} &= \sum_{\sigma=1}^{n_\rho} \frac{1}{(\sigma-1)!} R_\rho^{(\sigma)} \cdot w^{(\sigma)}(\gamma_\rho), \quad ((\sigma-1)! = 1 \text{ für } \sigma=1.) \\ A_\rho^{(1)} &= - \sum_{\sigma=1}^{n_\rho-1} \frac{1}{(\sigma-1)!} R_\rho^{(\sigma+1)} \cdot w^{(\sigma)}(\gamma_\rho), \\ A_\rho^{(2)} &= - \frac{2}{1!} \sum_{\sigma=1}^{n_\rho-2} \frac{1}{(\sigma-1)!} R_\rho^{(\sigma+2)} \cdot w^{(\sigma)}(\gamma_\rho), \\ &\dots \dots \dots \\ A_\rho^{(\kappa)} &= - \frac{\kappa}{(\kappa-1)!} \sum_{\sigma=1}^{n_\rho-1} \frac{1}{(\sigma-1)!} R_\rho^{(\sigma+\kappa)} \cdot w^{(\sigma)}(\gamma_\rho), \quad (\kappa > 1.) \\ &\dots \dots \dots \\ A_\rho^{(n_\rho-1)} &= - \frac{n_\rho-1}{(n_\rho-2)!} R_\rho^{(n_\rho)} \cdot w'(\gamma_\rho), \end{aligned} \right.$$

in denen allgemein  $w^{(\sigma)}(\gamma_\rho)$  den Wert von  $\frac{d^{(\sigma-1)} w'}{dz^{\sigma-1}}$  im Punkte  $\gamma_\rho$  bedeutet, und untersuchen das Verhalten dieser Integrale in  $T'$ .

Es ist:

1°) für  $z = \infty$ :

$$w' = 0^2, \quad \text{d. h. } J_1 = \text{f. c.},$$

$$t^{(v)}(o, \gamma_\rho) = \text{f. c.},$$

$$\frac{dP(o, \gamma_\rho)}{dz} = \frac{1}{nz} + \text{f. c.}, \quad \sum_{\rho=1}^r A_\rho^{(0)} = 0 \quad \text{nach II}^0)$$

$$\text{und daher } \lim_{\rho=1}^r A_\rho^{(0)} \cdot \frac{dP(o, \gamma_\rho)}{dz} = 0^2, \quad \text{d. h. } J_2 = \text{f. c.}$$

2°) Im Endlichen ist ausserhalb  $\gamma_\rho$  ( $\rho = 1, 2 \dots r$ ) überall  $J_1 = \text{f. c.}$ ,  $J_2 = \text{f. c.}$

In  $\gamma_\varrho (z = \zeta_\varrho)$  ist:

$$\tau \cdot w' = \frac{A_\varrho^{(0)}}{z - \zeta_\varrho} - \frac{A_\varrho^{(1)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} - \frac{1!}{2} \cdot \frac{A_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^3} - \dots \\ - \frac{(n_\varrho - 2)!}{n_\varrho - 1} \cdot \frac{A_\varrho^{(n_\varrho - 1)}}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho}} + \text{f. c.},$$

und daher:

$$J_1 = A_\varrho^{(0)} \log(z - \zeta_\varrho) + \frac{A_\varrho^{(1)}}{(z - \zeta_\varrho)} + \frac{A_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} + \dots \\ + \frac{(n_\varrho - 2)!}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho - 1}} A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} + \text{f. c.},$$

$$J_2 = A_\varrho^{(0)} \log(z - \zeta_\varrho) + \frac{A_\varrho^{(1)}}{z - \zeta_\varrho} + \frac{A_\varrho^{(2)}}{(z - \zeta_\varrho)^2} + \dots \\ + \frac{(n_\varrho - 2)!}{(z - \zeta_\varrho)^{n_\varrho - 1}} A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} + \text{f. c.}$$

In  $\gamma_\varrho (\varrho = 1, 2 \dots r)$  ist also  $J_1 - J_2 = \text{f. c.}$  Die Differenz

$$J_1 - J_2$$

ist daher in  $T'$  überall stetig, also ein Integral I. Gattung:

$$J_1 - J_2 = \sum_{\lambda=1}^p c_\lambda \cdot u_\lambda + \text{constans.}$$

Hieraus folgt:

$$\text{IV}^0) \quad \tau \cdot w' = \sum_{\lambda=1}^p c_\lambda \cdot u'_\lambda + \sum_{\varrho=1}^r \left[ A_\varrho^{(0)} \cdot \frac{dP(o, \gamma_\varrho)}{dz} \right. \\ \left. + A_\varrho^{(1)} \cdot \frac{dt_{(o, \gamma_\varrho)}^{(1)}}{dz} + \dots + A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} \cdot \frac{dt_{(o, \gamma_\varrho)}^{(n_\varrho - 1)}}{dz} \right],$$

$$\text{IV}^0) \quad \tau = \frac{\sum_{\lambda=1}^p c_\lambda \cdot u'_\lambda}{w'} + \frac{1}{w'} \cdot \sum_{\varrho=1}^r \left[ A_\varrho^{(0)} \cdot \frac{dP(o, \gamma_\varrho)}{dz} \right. \\ \left. + A_\varrho^{(1)} \cdot \frac{dt_{(o, \gamma_\varrho)}^{(1)}}{dz} + \dots + A_\varrho^{(n_\varrho - 1)} \cdot \frac{dt_{(o, \gamma_\varrho)}^{(n_\varrho - 1)}}{dz} \right].$$

Diese Formel stellt die Funktion  $\tau$  der Klasse dar durch einen Quotienten, dessen Divisor ein beliebiger Integrant I. Gattung ist, und dessen Dividend sich linear zusammensetzt aus einem Integranten I. Gattung, einem Integranten III. Gattung und einer Summe von Integranten II. Gattung.

Die auf der rechten Seite von  $IV^0$ ) vorkommenden konstanten Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  sind nicht willkürlich, sondern müssen, wenn die rechte Seite von  $IV^0$ ) nicht noch in andern Punkten als den Unstetigkeitspunkten von  $\tau$  unstetig werden soll, so bestimmt werden, daß die rechte Seite von  $IV^0$ ) in sämtlichen Nullpunkten von  $w'$  Null wird. Da die rechte Seite von  $IV^0$ ) für  $z = \infty$  ebenso wie  $w'$  gleich  $o^2$  wird, wie aus der Bildung der Integranten II. und III. Gattung hervorgeht, so genügt es, die Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  so zu bestimmen, daß die rechte Seite von  $IV^0$ ) in den im Endlichen gelegenen Nullpunkte von  $w'$  Null wird. Diese Bestimmung ist, da  $\tau w'$  stets in der Form  $IV^0$ ) sich darstellen läßt, unter jedem Umständen möglich.

Der Integrant  $w'$  in  $IV^0$ ) und  $IV^0_{\lambda}$ ) kann beliebig gewählt werden. Denkt man sich  $w'$ , wenn möglich, so bestimmt, daß dieser Integrant in sämtlichen Punkten  $\gamma_\rho$  zu derselben Ordnung verschwindet, zu der  $\tau$  daselbst unstetig wird, so sind alle Größen  $A_\rho$  gleich Null, und die Formel  $IV^0_{\lambda}$  reduziert sich auf:

$$V^0) \quad \tau = \frac{\sum_{\lambda=1}^p c_\lambda \cdot u'_\lambda}{w'}.$$

Umgekehrt geht  $IV^0_{\lambda}$ ) nur dann in  $V^0$ ) über, wenn alle  $A_\rho$  gleich Null sind, d. h. wenn der Integrant  $w'$  in allen Punkten  $\gamma_\rho$  ( $\rho = 1 \dots r$ ) zu den Ordnungen verschwindet, zu denen dort  $\tau = \infty$  wird. Dies giebt den

**Satz II<sup>o</sup>)** Läßt sich der allgemeine Integrant  $w'$  so bestimmen, daß er, ohne identisch Null zu werden, in jedem der  $r$  Unstetigkeitspunkte  $\gamma_\rho$  ( $\rho = 1, 2 \dots r$ ) einer Funktion  $\tau$  der Klasse zu derselben Ordnung  $n_\rho$  verschwindet, zu welcher  $\tau$  daselbst unstetig wird, so läßt sich  $\tau$

darstellen als Quotient zweier Integranden I. Gattung, und diese Darstellung ist auch nur unter den vorigen Bedingungen möglich.

Funktionen  $\tau$  der Klasse, die sich in der Form  $V^0$ ) darstellen lassen, nennen wir mit Christoffel (Brioschi's Annalen, Bd. X, pag. 240—301) Funktionen I. Gattung; das System der Unstetigkeitspunkte einer solchen Funktion heiße dementsprechend ein Punktsystem I. Gattung.\*) Funktionen der Klasse, die sich nicht in der Form  $V^0$ ) darstellen lassen, mögen Funktionen II. Gattung heißen, und das System der Unstetigkeitspunkte einer solchen Funktion ein Punktsystem II. Gattung.

### § 29. Drittes Kriterium für Punktsysteme der Klasse. Der Riemann-Roch'sche Satz.

Aus den an Formel  $IV^0$ ) des vorigen Paragraphen sich anschließenden Betrachtungen folgt, daß die Integranden I. Gattung für die Theorie der Punktsysteme der Klasse von grundlegender Bedeutung sind. Wir untersuchen daher diese Integranden etwas genauer.

Der allgemeine Integrand I. Gattung

$$1^0) \quad w' = \sum_{i=1}^p c_i \cdot u_i'$$

ist eine Funktion der Klasse und besitzt daher ebensoviel Nullpunkte wie Unstetigkeitspunkte erster Ordnung (mehrfache Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte denken wir uns hierbei in einfache aufgelöst). Da  $w'$  nur in den Verzweigungspunkten von  $T$ , und zwar in einem Verzweigungspunkte von der Ordnung  $\mu$  höchstens zur Ordnung  $\mu - 1$  unstetig wird, so ist die Gesamtordnung des Unstetigwerdens von  $w'$  gleich der Anzahl  $v$  der einfachen Verzweigungspunkte, die sämtlichen Verzweigungspunkten von  $T$  äquivalent ist. Diese Anzahl  $v$  ist nach  $3^0$ ) § 15 gleich  $2p + 2n - 2$ .

\*) Die Punktsysteme I. Gattung sind identisch mit den Spezialgruppen der Herren Brill u. Nöther, die Punktsysteme II. Gattung mit den Nichtspezialgruppen derselben Autoren.

$w'$  besitzt also auch  $2p + 2n - 2$  Nullpunkte erster Ordnung, und zwar liegen  $2n$  derselben jedenfalls im Unendlichen, da jeder Integrand I. Gattung im Unendlichen in jedem der  $n$  Blätter von  $T$  mindestens  $= 0^2$  wird. Die übrigen  $2p - 2$  Nullpunkte von  $w'$  liegen im allgemeinen im Endlichen; wir bezeichnen sie kurz als die im Endlichen liegenden Nullpunkte von  $w'$ , womit nicht ausgeschlossen sein soll, daß für spezielle Integranden I. Gattung einige dieser  $2p - 2$  Punkte oder sogar alle im Unendlichen liegen können. Bezeichnet man diese  $2p - 2$  von der Wahl der Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  abhängigen, variablen Nullpunkte von  $w'$  mit  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_x \dots \varepsilon_{2p-2}$  und die Verzweigungspunkte mit  $\alpha_1 \dots \alpha_\mu \dots \alpha_v$ , so gilt der Satz:

**Satz I<sup>o</sup>)** Der allgemeine Integrand I. Gattung  $w'$  ist von der Ordnung  $2p + 2n - 2$ , und seine Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte sind verbunden durch die  $p$  Beziehungen:

$$2^o) \quad \sum_{\mu=1}^v u_i(\alpha_\mu) \equiv \sum_{x=1}^{2p-2} u_i(\varepsilon_x) + 2 \sum_{v=1}^n u_i(\infty_v), \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

des Abel'schen Theorems für Integrale I. Gattung.

Wir kehren nunmehr zu den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zurück.

Am Schlusse des § 28 haben wir gesehen, daß, wenn es möglich ist, den allgemeinen Integranden I. Gattung  $w'$  so zu bestimmen, daß er, ohne identisch Null zu werden, in jedem der Unstetigkeitspunkte  $\gamma_1 \dots \gamma_\varrho \dots \gamma_r$  einer Funktion  $\tau$  der Klasse zu derselben Ordnung verschwindet, zu der  $\tau$  in diesem Punkte unendlich wird, die Funktion  $\tau$  sich in sehr einfacher Weise als Quotient zweier Integranden I. Gattung darstellen läßt. Der Wichtigkeit dieses Falles wegen untersuchen wir die Möglichkeit dieser Bestimmung von  $w'$  etwas genauer.

Die Ordnung des Unendlichwerdens von  $\tau$  im Punkte  $\gamma_\varrho$  ( $\varrho = 1, \dots, r$ ) sei allgemein gleich  $n_\varrho$ . Die Gleichungen,

welche ausdrücken, daß  $w'$  in jedem Punkte  $\gamma_\rho$  zur entsprechenden Ordnung  $n_\rho$  verschwindet, lauten dann:

$$3^\circ) w'(\gamma_\rho) = 0, w''(\gamma_\rho) = 0, \dots w^{(n_\rho)}(\gamma_\rho) = 0, (\rho = 1, 2 \dots r).$$

Diese Gleichungen, deren Gesamtzahl  $= \sum_{\rho=1}^r n_\rho = q$  ist, sind linear und homogen in den zu bestimmenden Koeffizienten

$c_1 \dots c_p$  des allgemeinen Integranden  $w' = \sum_{\lambda=1}^p c_\lambda u_\lambda$  und können daher niemals einen Widerspruch enthalten, da es stets ein System von Lösungen giebt, das diese Gleichungen befriedigt, nämlich das Lösungssystem  $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$ . Die Frage, die hier zu untersuchen ist, lautet jedoch: unter welchen Umständen ist es möglich, sämtliche Gleichungen  $3^\circ)$  durch Größen  $c_1 \dots c_p$  zu befriedigen, die nicht alle gleich Null sind? Die Beantwortung dieser Frage gründet sich auf die Betrachtung der Beziehung II $^\circ)$  des vorigen Paragraphen.

In dieser Relation II $^\circ)$

$$\sum_{\rho=1}^r \left[ R_\rho^{(1)} \cdot w'(\gamma_\rho) + \frac{R_\rho^{(2)}}{1!} w''(\gamma_\rho) + \frac{R_\rho^{(3)}}{2!} w^{(3)}(\gamma_\rho) + \dots \right. \\ \left. + \frac{R_\rho^{(n_\rho)}}{(n_\rho - 1)!} w^{(n_\rho)}(\gamma_\rho) \right] = 0$$

sind die Größen  $R_\rho^{(n_\rho)}$  ( $\rho = 1 \dots r$ ), wenn wir voraussetzen, daß  $\tau$  in  $\gamma_\rho$  wirklich zur Ordnung  $n_\rho$  unstetig wird, alle von Null verschieden. Denken wir uns daher die Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  so bestimmt, daß die Gleichungen:

$w'(\gamma_1) = 0, \dots w^{(n_1)}(\gamma_1) = 0, \dots w'(\gamma_r) = 0, \dots w^{(n_r-1)}(\gamma_r) = 0$  erfüllt sind, so folgt aus II $^\circ)$  unmittelbar, daß auch die Gleichung:

$$\frac{R_r^{(n_r)}}{(n_r - 1)!} w^{(n_r)}(\gamma_r) = 0,$$

oder, da  $R_r^{(n_r)}$  von Null verschieden ist, die Gleichung:

$$w^{(n_r)}(\gamma_r) = 0$$

erfüllt ist. —

Dies giebt den

**Satz II<sup>o</sup>)** Die  $q = \sum_{\varrho=1}^r n_{\varrho}$  Gleichungen 3<sup>o</sup>), die ausdrücken, daß der allgemeine Integrand I. Gattung

$$w' = \sum_{\lambda=1}^p c_{\lambda} u'_{\lambda}$$

in jedem Punkte  $\gamma_{\varrho}$  des Systems  $\gamma_1 \dots \gamma_{\varrho} \dots \gamma_r$  der Unstetigkeitspunkte einer Funktion  $\tau$  der Klasse zu derselben Ordnung  $n_{\varrho}$  verschwindet, zu der  $\tau$  daselbst unstetig wird, enthalten mindestens eine überzählige Gleichung.\*)

Dieser Satz läßt sich umkehren.

Angenommen, das System 3<sup>o</sup>) enthalte die  $x$  ( $\leq 1$ ) überzähligen Gleichungen:

$$4^o) \quad w^{(\mu_1)}(\gamma_{v_1}) = 0, \dots, w^{(\mu_{\alpha})}(\gamma_{v_{\alpha}}) = 0, \dots, w^{(\mu_x)}(\gamma_{v_x}) = 0,$$

wo  $\mu_1 \dots \mu_{\alpha} \dots \mu_x$  Zahlen aus den  $r$  Reihen  $1, 2 \dots n_{\varrho}$  ( $\varrho = 1 \dots r$ ), und  $\gamma_{v_1} \dots \gamma_{v_{\alpha}} \dots \gamma_{v_x}$  Punkte aus dem System  $\gamma_1 \dots \gamma_{\varrho} \dots \gamma_r$  bedeuten, von denen auch zwei oder mehr identisch sein können. Die übrigen  $q - x$  Gleichungen des Systems 3<sup>o</sup>)

$$5^o) \quad w^{(\mu_x+1)}(\gamma_{\pi_1}) = 0, \dots, w^{(\mu_x+\beta)}(\gamma_{\pi_{\beta}}) = 0, \dots, w^{(\mu_q)}(\gamma_{\pi_{q-x}}) = 0,$$

in denen  $\mu_{x+1}, \dots, \mu_{x+\beta}, \dots, \mu_q$  in unbestimmter Reihenfolge diejenigen Zahlen bezeichnen, die von den  $r$  Reihen  $1, 2 \dots n_{\varrho}$  ( $\varrho = 1 \dots r$ ) nach Wegnahme von  $\mu_1 \dots \mu_{\alpha} \dots \mu_x$  übrig bleiben, und  $\gamma_{\pi_1} \dots \gamma_{\pi_{\beta}} \dots \gamma_{\pi_{q-x}}$  Punkte aus der Reihe  $\gamma_1 \dots \gamma_{\varrho} \dots \gamma_r$  bedeuten, von denen auch zwei oder mehr unter sich oder mit Punkten  $\gamma_{v_{\alpha}}$  identisch sein können, nennen wir die wesentlichen Gleichungen des Systems 3<sup>o</sup>).

Unter diesen Voraussetzungen bestehen zwischen den Polynomen der Gleichungen 4<sup>o</sup>) und 5<sup>o</sup>)  $x$  Beziehungen von der Form:

$$6^o) \quad w^{(\mu_{\alpha})}(\gamma_{v_{\alpha}}) = \sum_{\beta=1}^{q-x} c_{\alpha\beta} \cdot w^{(\mu_x+\beta)}(\gamma_{\pi_{\beta}}), \quad (\alpha = 1, \dots, x)$$

\*) Christoffel, Brioschi's Annalen, Serie II, Bd. IX, 1879.

wo die konstanten Koeffizienten  $c_{\alpha\beta}$  nicht alle  $= 0$  sind. Berücksichtigt man, daß diese Beziehungen Identitäten (in Bezug auf die Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  von  $w' = \sum c_i u'_i$ ) darstellen, und daß daher in 6<sup>o</sup>) die beiderseitigen Multiplikatoren eines jeden Koeffizienten  $c_i$  einander gleich sind, so erkennt man, daß 6<sup>o</sup>) äquivalent ist mit den  $\kappa p$  Beziehungen:

$$7^o) \quad u^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\pi_\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{q-\kappa} c_{\alpha\beta} \cdot u^{(\mu_\kappa+\beta)}_i(\gamma_{\pi_\beta}). \quad \left( \begin{matrix} \alpha=1, 2 \dots \kappa \\ \lambda=1, 2 \dots p \end{matrix} \right)$$

Mit Zuhilfenahme dieser Beziehungen, welche eine notwendige Folge der Annahme von  $\kappa$  überzähligen Gleichungen im System 3<sup>o</sup>) sind, nimmt die linke Seite der Relationen  $\Pi_\alpha^o)$  des vorigen Paragraphen die Form an:

$$\begin{aligned} & \sum_{\varrho=1}^r \left[ R_{\varrho}^{(1)} \cdot u'_i(\gamma_{\varrho}) + \frac{R_{\varrho}^{(2)}}{1!} u''_i(\gamma_{\varrho}) + \dots + \frac{R_{\varrho}^{(n_{\varrho})}}{(n_{\varrho}-1)!} u^{(n_{\varrho})}_i(\gamma_{\varrho}) \right] \\ &= \sum_{\beta=1}^{q-\kappa} \frac{R_{\pi_\beta}^{(\mu_\kappa+\beta)}}{(\mu_\kappa+\beta-1)!} u^{(\mu_\kappa+\beta)}_i(\gamma_{\pi_\beta}) + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \frac{R_{\gamma_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha-1)!} u^{(\mu_\alpha)}_i(\gamma_{\gamma_\alpha}) \\ &= \sum_{\beta=1}^{q-\kappa} \frac{R_{\pi_\beta}^{(\mu_\kappa+\beta)}}{(\mu_\kappa+\beta-1)!} u^{(\mu_\kappa+\beta)}_i(\gamma_{\pi_\beta}) \\ & \quad + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \left[ \frac{R_{\gamma_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha-1)!} \cdot \sum_{\beta=1}^{q-\kappa} c_{\alpha\beta} \cdot u^{(\mu_\kappa+\beta)}_i(\gamma_{\pi_\beta}) \right] \\ &= \sum_{\beta=1}^{q-\kappa} \left[ u^{(\mu_\kappa+\beta)}_i(\gamma_{\pi_\beta}) \cdot \left\{ \frac{R_{\pi_\beta}^{(\mu_\kappa+\beta)}}{(\mu_\kappa+\beta-1)!} + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \frac{R_{\gamma_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha-1)!} c_{\alpha\beta} \right\} \right], \end{aligned}$$

worin  $(\mu_\kappa+\beta-1)!$  und  $(\mu_\alpha-1)!$  gleich 1 zu nehmen sind, wenn  $\mu_\kappa+\beta$  und  $\mu_\alpha$  gleich 1 sind. Setzt man hierin

$$8^o) \quad \frac{R_{\pi_\beta}^{(\mu_\kappa+\beta)}}{(\mu_\kappa+\beta-1)!} + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \frac{R_{\gamma_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha-1)!} c_{\alpha\beta} = 0,$$

für  $\beta = 1, 2 \dots q - \kappa$ ,

so sind die  $p$  Beziehungen  $\Pi_\alpha^o)$  des vorigen Paragraphen ganz sicher erfüllt. Die  $q - \kappa$  Gleichungen 8<sup>o</sup>), in denen



nicht alle  $c_{\alpha\beta}$  gleich Null sind, bestimmen jede eine der  $q - \kappa$  Größen  $R_{\pi\beta}$ , während die  $\kappa$  Größen  $R_{\nu\alpha}$  willkürlich bleiben und also auch von Null verschieden angenommen werden können. Unter der Voraussetzung, daß das System 3<sup>o</sup>)  $\kappa$  ( $\leq 1$ ) überzählige Gleichungen enthält, lassen sich somit die Größen  $R_\rho$  so bestimmen, daß die  $p$  Beziehungen II.<sup>o</sup>) des vorigen Paragraphen erfüllt sind, ohne daß alle  $R_\rho = 0$  sind. Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so können wir daher, nach Satz I<sup>o</sup>), § 28, folgenden Satz aussprechen:

**Satz III.<sup>o</sup>)** Die erforderliche und ausreichende Bedingung dafür, daß zu einem Punktsystem  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$ , das den Punkt  $\gamma_\rho$  allgemein  $n_\rho$ -mal enthält, eine Funktion  $\tau$  der Klasse existiert, die in allen diesen Punkten  $\gamma_\rho$  ( $\rho = 1, \dots, r$ ) oder in einem Teile derselben zur Ordnung  $n_\rho$  oder zu einer niedrigeren Ordnung unstetig wird, ist daß das Gleichungssystem 3<sup>o</sup>) überzählige Gleichungen enthält.

Dieser Satz liefert ein drittes Kriterium für Punktsysteme der Klasse.

Die bisherigen Erörterungen dieses Paragraphen geben uns nunmehr auch die Antwort auf die Frage, wann eine vorgegebene Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q$  eine Funktion I. Gattung ist, und wann eine Funktion II. Gattung.

Bedeutet  $\kappa$  wieder die genaue Anzahl der überzähligen Gleichungen des der Funktion  $\tau$  entsprechenden Gleichungssystems 3<sup>o</sup>), so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

A<sup>o</sup>) Es sei  $q - \kappa < p$ .

In diesem Falle bestimmen die wesentlichen Gleichungen des Systems 3<sup>o</sup>)  $q - \kappa$  von den Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  des allgemeinen Integranden I. Gattung als Funktionen der übrigen  $\kappa$  Koeffizienten, welche willkürlich bleiben. Für  $q - \kappa < p$  läßt sich daher der allgemeine Integrand I. Gattung

$$w' = \sum_{\lambda=1}^p c_\lambda u'_\lambda,$$

ohne identisch Null zu werden, so bestimmen, daß er in jedem Unstetigkeitspunkte der Funktion  $\tau$  zu derselben Ordnung verschwindet, zu der  $\tau$  daselbst unstetig wird. Nach § 28 läßt sich dann  $\tau$  als Quotient von zwei Integralen I. Gattung darstellen, d. h.  $\tau$  ist eine Funktion I. Gattung.

B<sup>o</sup>) Es sei  $q - \kappa = p$ .

In diesem Falle ist die Anzahl der wesentlichen, d. h. von einander unabhängigen Gleichungen des Systems 3<sup>o</sup>) gleich der Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  von  $w'$ .

Das System 3<sup>o</sup>) hat daher nur ein Lösungssystem, nämlich das System  $c_1 = \dots = c_p = 0$ . Für  $q - \kappa = p$  wird also  $w'$  identisch Null, wenn man ihm die Bedingung auferlegt, in jedem Unstetigkeitspunkte  $\gamma_\rho$  von  $\tau$  zu einer Ordnung zu verschwinden, die gleich der Ordnung des Unendlichwerdens von  $\tau$  in diesem Punkte ist.  $\tau$  ist daher eine Funktion II. Gattung.

Die Differenz  $q - \kappa$  kann nicht größer als  $p$  sein. Wäre nämlich die Anzahl  $q - \kappa$  der wesentlichen Gleichungen des Systems 3<sup>o</sup>) gleich  $p + k$ , so würden irgend  $p$  dieser Gleichungen für  $c_1 \dots c_p$  den gemeinsamen Wert 0 liefern, und die übrigen  $k$  wesentlichen Gleichungen 3<sup>o</sup>) wären dann von selbst erfüllt, also von den  $p$  ersten abhängig, was der Voraussetzung widerspricht, daß sie zu den wesentlichen Gleichungen gehören. Das Vorige liefert zusammen den

**Satz IV<sup>o</sup>)** Enthält das Gleichungssystem 3<sup>o</sup>), welches ausdrückt, daß der allgemeine Integrand I. Gattung  $w'$  in jedem der Unstetigkeitspunkte  $\gamma_\rho$  ( $\rho = 1 \dots r$ ) einer Funktion  $\tau$  der Klasse zu derselben Ordnung  $n_\rho$  verschwindet, zu der  $\tau$  daselbst unstetig wird, genau  $\kappa$  überzählige Gleichungen, so ist  $\tau$  eine Funktion I. oder II. Gattung, je nachdem

$$q - \kappa < p \quad \text{oder} \quad q - \kappa = p$$

ist.

Aus dem Beweis des Satzes III<sup>o</sup>) ergibt sich noch ein wichtiges Resultat. Bedeutet wieder  $\tau$  irgend eine Funktion der Klasse, die in den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  zu den Ordnungen  $n_1 \dots n_\rho \dots n_r$  unstetig wird, so daß  $\tau$  die Gesamtordnung  $q = \sum_{\rho=1}^r n_\rho$  besitzt, so läßt sich  $\tau$ , nach Satz III<sup>o</sup>), § 28, darstellen in der Form:

$$9^o) \quad \tau = C + \sum_{\rho=1}^r \left[ R_\rho^{(1)} \cdot t^{(1)}(o, \gamma_\rho) + \frac{R_\rho^{(2)}}{1!} t^{(2)}(o, \gamma_\rho) + \dots \right. \\ \left. + \frac{R_\rho^{(n_\rho)}}{(n_\rho - 1)!} t^{(n_\rho)}(o, \gamma_\rho) \right],$$

wo die  $t(o, \gamma_\rho)$  definitiv normierte Integrale II. Gattung sind. Enthält nun das zum Punktsystem  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  gehörige Gleichungssystem 3<sup>o</sup>) dieses Paragraphen genau  $\kappa$  überzählige Gleichungen von der Form 4<sup>o</sup>) und  $q - \kappa$  wesentliche Gleichungen von der Form 5<sup>o</sup>), so bestehen zwischen den  $R_\rho$  die  $q - \kappa$  Beziehungen 8<sup>o</sup>), in denen die  $\kappa$  Größen  $R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}$  willkürlich sind. Mit Berücksichtigung dieser Beziehungen 8<sup>o</sup>) geht dann 9<sup>o</sup>) über in

$$10^o) \quad \tau = C + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \frac{R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}}{(\mu_\alpha - 1)!} \left[ t^{(\mu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\alpha}) \right. \\ \left. - \sum_{\beta=1}^{q-\kappa} c_{\alpha\beta} \cdot t^{(\mu_\alpha+\beta)}(o, \gamma_{\pi_\beta}) \right],$$

worin nur noch  $\kappa + 1$  willkürliche Konstanten vorkommen, nämlich die  $\kappa$  Größen  $R_{\nu_\alpha}^{(\mu_\alpha)}$  und die additive Konstante  $C$ .

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck:

$$11^o) \quad \tau_\alpha = t^{(\mu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\alpha}) - \sum_{\beta=1}^{q-\kappa} c_{\alpha\beta} \cdot t^{(\mu_\alpha+\beta)}(o, \gamma_{\pi_\beta}) \\ (\alpha = 1, 2 \dots \kappa)$$

ist ein Integral II. Gattung, das, gemäß den Eigenschaften der definitiv normierten Integrale II. Gattung, durch seine Unstetigkeitspunkte allein vollständig bestimmt ist, an den Querschnitten  $a_\lambda$  und  $c_\lambda$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) den Periodizitätsmodul 0 und an den Querschnitten  $b_\lambda$  ( $\lambda = 1 \dots p$ ) den Periodizitätsmodul:

$$- 2 \left[ u_\lambda^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{r_\alpha}) - \sum_{\beta=1}^{q-x} c_{\alpha\beta} \cdot u_\lambda^{(\mu_\alpha+\beta)}(\gamma_{r_\beta}) \right]$$

besitzt. Infolge der aus der Annahme von  $x$  überzähligen Gleichungen sich ergebenden Beziehungen 7<sup>o</sup>) ist aber dieser Periodizitätsmodul  $= 0$ .  $\tau_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2 \dots x$ ) ist also eine Funktion von  $z$ , die in  $T'$  überall eindeutig ist, nur in einer endlichen Anzahl von Punkten zu endlicher Ordnung unstetig wird und an den Querschnitten von  $T'$  lauter verschwindende Periodizitätsmoduln hat, d. h.  $\tau_\alpha$  ist eine Funktion der Klasse. Die Ordnung dieser Funktion ist, wie der Ausdruck 11<sup>o</sup>) zeigt, höchstens  $= q - x + 1$ . Dies giebt den

**Satz V<sup>o</sup>)** Enthält das Gleichungssystem 3<sup>o</sup>), das einem Punktsysteme  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  entspricht, in dem der Punkt  $\gamma_\rho$  allgemein  $n_\rho$ -mal vorkommt, genau  $x$  überzählige Gleichungen, so läßt sich die allgemeinste Funktion  $\tau$  der Klasse, die in den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  zu den Ordnungen  $n_1 \dots n_\rho \dots n_r$  unstetig wird, darstellen in der Form:

$$12^o) \quad \tau = C + \sum_{\alpha=1}^x c_\alpha \cdot \tau_\alpha,$$

worin die  $x + 1$  Größen  $C, c_1, c_2 \dots c_x$  die einzigen noch verfügbaren Konstanten sind, und  $\tau_1 \dots \tau_\alpha \dots \tau_x$  Funktionen der Klasse bezeichnen, die höchstens von der Ordnung  $q - x + 1$  sind, und deren Unstetigkeitspunkte dem Punktsysteme  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  angehören.

Dieser Satz heisst der **Riemann-Roch'sche Satz**. Riemann hat denselben bewiesen für  $q - x = p$ , d. h. für Funktionen II. Gattung, und außerdem für einige spezielle

Funktionen I. Gattung. Roch hat dann später den Satz auf Funktionen I. Gattung im allgemeinen ausgedehnt. \*)

An Satz V<sup>o</sup>) schloß sich einige Folgerungen an.

**Folgerung 1<sup>o</sup>)** Die geringste Anzahl von verfügbaren Konstanten, welche die allgemeinste Funktion  $\tau$  der Klasse mit vorgeschriebenen Unstetigkeitspunkten noch besitzen kann, beträgt 2. — Es folgt dies daraus, daß  $\kappa \geq 1$  ist.

**Folgerung 2<sup>o</sup>)** Jede Funktion  $\tau$  der Klasse hat mindestens 2 Unstetigkeitspunkte. — Dieser schon früher bewiesene Satz folgt hier daraus, daß die Anzahl  $q - \kappa$  der wesentlichen Gleichungen des Systems 3<sup>o</sup>) mindestens  $= 1$  sein muß.

Eine weitere Folgerung beruht auf einer Eigenschaft der Funktionen  $\tau_\alpha$ . Von diesen gilt nämlich der

**Satz VI<sup>o</sup>)** Die  $\kappa$  Funktionen  $\tau_1 \dots \tau_\alpha \dots \tau_\kappa$  der Klasse sind linear unabhängig, d.h. das lineare Aggregat

$$x_1 \tau_1 + x_2 \tau_2 + \dots + x_\kappa \tau_\kappa,$$

in dem  $x_1 \dots x_\kappa$  verfügbare Konstanten sind, kann nur dann sich auf eine Konstante reduzieren, wenn alle  $x_1 \dots x_\kappa$  gleich Null gesetzt werden.

Beweis: Jedes Aggregat  $\sum_{\alpha=1}^{\kappa} x_\alpha \cdot \tau_\alpha$  ist zufolge 11<sup>o</sup>) von der Form:

$$\sum_{\alpha=1}^{\kappa} x_\alpha \cdot t^{(\mu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\alpha}) - \sum_{\alpha=1}^{\kappa} x_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{q-\kappa} c_{\alpha\beta} \cdot t^{(\mu_\alpha + \beta)}(o, \gamma_{\pi_\beta}).$$

In diesem Ausdruck sind nicht alle  $c_{\alpha\beta} = 0$ ; sind außerdem auch nicht alle  $x_\alpha = 0$ , so verhält sich die Funktion  $\sum x_\alpha \tau_\alpha$  der Klasse bezüglich ihres Unstetigwerdens wie folgt. Kommt einer der Punkte  $\gamma_{\nu_\alpha}$  unter den Punkten  $\gamma_{\pi_\beta}$  vor, so sind jedenfalls, wie aus den Bemerkungen zu den Gleichungssystemen 4<sup>o</sup>) und 5<sup>o</sup>) dieses Paragraphen hervorgeht, die zugehörigen Ordnungen  $\mu_\alpha$  und  $\mu_\alpha + \beta$  des Unstetigwerdens von einander verschieden; sind umgekehrt irgend

\*) Riemann, Ges. Werke, pag. 101, 111, 200, 203.  
Roch, Crelle's Journal, Bd. 64, pag. 372 ff.

zwei Ordnungen  $\mu_\alpha$  und  $\mu_{\alpha+\beta}$  einander gleich, so sind sicher die Punkte  $\gamma_{r_\alpha}$  und  $\gamma_{r_{\alpha+\beta}}$ , in denen diese Unstetigkeiten gleicher Ordnung auftreten, von einander verschieden. Minuend und Subtrahend von  $\Sigma x_\alpha \tau_\alpha$  werden also nie in demselben Punkte zu derselben Ordnung unstetig; ebensowenig enthalten Minuend und Subtrahend, jeder für sich betrachtet, Glieder, die in demselben Punkte zu derselben Ordnung unstetig werden, und so etwa bei geeigneter Bestimmung der konstanten Größen  $x_\alpha$  sich heben könnten. Sind daher nicht alle  $x_\alpha$  ( $\alpha = 1 \dots x$ ) gleich Null, so ist auf jeden Fall  $\Sigma x_\alpha \cdot \tau_\alpha$  eine Funktion der Klasse mit wirklichen Unstetigkeitspunkten, und daher keine Konstante, w. z. b w.

In 12<sup>o</sup>) sind noch  $x + 1$  willkürliche Konstanten vorhanden. Dieselben lassen sich dazu benutzen, um der Funktion  $\tau$ , deren Unstetigkeitspunkte festgelegt sind, noch eine Anzahl Nullpunkte aufzuprägen. In dieser Beziehung gilt der

**Satz VII<sup>o</sup>)** Verfügt man über die  $x + 1$  willkürlichen Konstanten  $C, c_1 \dots c_x$  in 12<sup>o</sup>) so, daß  $\tau$  in  $x$  beliebigen (getrennt oder vereinigt liegenden) Punkten  $\beta_1 \dots \beta_x$  verschwindet, so sind dadurch die übrigen  $q - x$  Nullpunkte von  $\tau$  im allgemeinen eindeutig bestimmt, d. h.  $\tau$  ist dann im allgemeinen vollständig bestimmt bis auf einen konstanten Faktor.\*)

Beweis: Soll  $\tau = C + \sum_{\alpha=1}^x c_\alpha \tau_\alpha$  in den Punkten  $\beta_1 \dots \beta_x$  verschwinden, so müssen  $C, c_1 \dots c_x$  bestimmt werden aus den  $x$  Gleichungen:

$$13^o) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha=1}^x c_\alpha \cdot \tau_\alpha(\beta_1) = -C, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{\alpha=1}^x c_\alpha \cdot \tau_\alpha(\beta_x) = -C. \end{array} \right.$$

\*) Rost, Theorie der Riemann'schen Thetafunktion, pag. 25.

Ist die Determinante

$$14^{\circ}) \quad D = \begin{vmatrix} \tau_1(\beta_1) & \dots & \tau_x(\beta_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_1(\beta_x) & \dots & \tau_x(\beta_x) \end{vmatrix}$$

dieser Gleichungen nicht für jede Wahl der  $x$  Punkte  $\beta_1 \dots \beta_x$  identisch Null, so bestimmen die Gleichungen 13<sup>o</sup>) die Koeffizienten  $c_1 \dots c_x$  sämtlich proportional zu  $C$ , und der Satz ist bewiesen. — In der Fläche  $T$  grenzen wir  $x$  Bereiche  $K_1 \dots K_x$  ab, von denen keiner einen der Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  enthält. Wäre nun  $D=0$  für irgend welche  $x$  je in den Bereichen  $K_1 \dots K_x$  angenommenen Punkte  $\beta_1 \dots \beta_x$ , so würde  $D$  als Funktion des variablen Punktes  $\beta_1$  für jeden innerhalb des Bereiches  $K_1$  gelegenen Punkt  $\beta_1$  Null sein, wie auch die  $x-1$  Punkte  $\beta_2 \dots \beta_x$  innerhalb der Bereiche  $K_2 \dots K_x$  angenommen sein mögen, und es müßten dann auch, wegen der Linearunabhängigkeit von  $\tau_1 \dots \tau_x$ , alle Unterdeterminanten  $(x-1)$ -ter Ordnung von  $\tau_1(\beta_1) \dots \tau_x(\beta_1)$  in  $D$  Null sein für beliebige Lagen der Punkte  $\beta_2 \dots \beta_x$  innerhalb ihrer Bereiche. Wiederholt man diese Betrachtungen für die zu  $\tau_1(\beta_1)$  gehörige Unterdeterminante von  $D$ , und fährt man so fort, so erhielte man schließlich das Resultat, daß  $\tau_x(z)$  für jeden im Bereiche  $K_x$  gelegenen Punkt  $z=\beta_x$ , und also auch für jeden Punkt von  $T$  den Wert Null hat. Letzteres ist aber unmöglich. — Es lassen sich also auf jeden Fall innerhalb der Gebiete  $K_1 \dots K_x$  Punkte  $\beta'_1 \dots \beta'_x$  so auswählen, daß  $D$  nicht Null ist, wenn man  $\beta_1 = \beta'_1 \dots \beta_x = \beta'_x$  werden läßt.

Da aber  $D$  als Funktion von  $\beta_1 \dots \beta_x$  betrachtet für  $\beta_1 = \beta'_1 \dots \beta_x = \beta'_x$  stetig ist, so lassen sich in  $T$   $x$  Gebiete  $L_1 \dots L_x$  so abgrenzen, daß  $D$  von Null verschieden ist, wie auch die  $x$  Punkte  $\beta_1 \dots \beta_x$  in den entsprechenden Gebieten gewählt werden mögen. — Damit ist der Satz bewiesen.

Werden die  $x$  Nullpunkte  $\beta_1 \dots \beta_x$  in spezieller Lage angenommen, so kann es vorkommen, daß die übrigen  $q-x$  Nullpunkte von  $\tau$  durch die Annahme von  $\beta_1 \dots \beta_x$  nicht eindeutig bestimmt sind. Auf diesen Ausnahmefall, der, wie wir gleich hinzufügen wollen, stets und nur dann eintritt, wenn das Gleichungssystem 13<sup>o</sup>) überzählige

Gleichungen enthält, hat zuerst Herr Rost hingewiesen (siehe die Abhdlg.: Theorie d. Riem.  $\mathfrak{J}$ -Funktion, pag. 63, Anmerk. 6<sup>o</sup>).

Für die Zahl  $\kappa$ , die in den Betrachtungen dieses Paragraphen eine ausschlaggebende Rolle gespielt hat, führen wir eine Bezeichnung ein: wir nennen, mit Christoffel, die Zahl  $\kappa$  den Überschufs des Punktsystems  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r$  der Klasse.\*) Dieser Überschufs ist nach Satz III<sup>o</sup>) stets  $\geq 1$ .

Das Punktsystem  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r$ , welches das System der Unstetigkeitspunkte der Funktion  $\tau$  der Klasse bildet, ist nicht das einzige Punktsystem der Klasse, dem der Überschufs  $\kappa$  zukommt. — Wie wir früher (Satz VI<sup>o</sup>) § 12) bewiesen haben, nimmt die Funktion  $\tau$  von der Ordnung

$q = \sum_{\rho=1}^r n_\rho$  jeden beliebigen Wert  $K$  in einer Gruppe von

$q$  getrennt oder vereinigt liegenden Punkten von  $T$  an. Den  $\infty$ -vielen möglichen Werten von  $\tau$  entsprechen so in  $T$   $\infty$ -viele Gruppen von je  $q$  Punkten; je zwei dieser Punktsysteme nennen wir äquivalente Punktsysteme, und die Gesamtheit aller  $\infty$ -vielen Punktsysteme dieser Art die zur Funktion  $\tau$  gehörigen äquivalenten Punktsysteme. Sind  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_q \dots \varepsilon_q$  und  $\delta_1 \dots \delta_q \dots \delta_q$  irgend 2 solche Systeme, in denen die Funktion  $\tau$  der Klasse den Wert  $a$  resp.  $b$  annimmt, so sind diese Punktsysteme die

Null- und Unstetigkeitspunkte der Funktion  $\frac{\tau - a}{\tau - b}$  der

Klasse und sind daher verbunden durch die Gleichung des Abel'schen Theorems für Integrale I. Gattung, die sich in der Form der Kongruenz:

$$15^o) \quad \sum_{\sigma=1}^q w(\varepsilon_\sigma) \equiv \sum_{\sigma=1}^q w(\delta_\sigma),$$

schreiben läßt, wo das Kongruenzzeichen  $\equiv$  ausdrückt, daß die zwei Seiten von 15<sup>o</sup>) einander gleich sind bis auf ein System zusammengehöriger Periodizitätsmoduln von  $w$ .

\*) Herr Rost nennt die Differenz  $q - \kappa$  den Rang des Punktsystems  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r$ . — Wir halten an der Christoffel'schen Bezeichnung fest, weil sie uns natürlicher erscheint.



Die Null- und Unstetigkeitspunkte einer Funktion der Klasse bilden äquivalente Punktsysteme; berücksichtigt man daher, daß die Funktion  $\tau - a$ , wo  $a$  eine beliebige Konstante bedeutet, dieselben Unstetigkeitspunkte  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r$  hat wie  $\tau$  selbst, so können wir den Satz VII.<sup>o</sup>) auch aussprechen, wie folgt:

**Satz VII.<sup>o</sup>)** Besitzt das Punktsystem  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r$ , in dem der Punkt  $\gamma_q$  allgemein  $n_q$ -mal vorkommt, den Überschufs  $\kappa$ , so können für die Bildung eines mit ihm äquivalenten Punktsystems  $\kappa$  Punkte beliebig gewählt werden; durch dieselben sind die übrigen  $q - \kappa$  Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Berücksichtigt man ferner, daß, wenn  $\tau$  die allgemeinste Funktion der Klasse ist, die in den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_r$  zu den Ordnungen  $n_1 \dots n_q \dots n_r$  unstetig wird, und  $\beta_1 \dots \beta_\sigma \dots \beta_q$  resp.  $\delta_1 \dots \delta_\sigma \dots \delta_q$  die zwei Systeme von je  $q$  getrennt oder vereinigt liegenden Punkten bezeichnen, in denen  $\tau$  die beliebigen Werte  $b$  resp.  $d$  annimmt, die Funktion  $\frac{\tau - b}{\tau - d}$  die allgemeinste Funktion der

Klasse ist, die in den Punkten  $\delta_1 \dots \delta_\sigma \dots \delta_q$  unstetig wird, so sieht man ein, daß Satz VII.<sup>o</sup>) sich auch in der allgemeinen Form aussprechen läßt:

**Satz VII.<sup>o</sup>)** Besitzt das Punktsystem  $\delta_1 \dots \delta_\sigma \dots \delta_q$ , in dem die Funktion  $\tau$  der Klasse irgend einen Wert  $d$  annimmt, den Überschufs  $\kappa$ , so können für die Bildung eines mit ihm äquivalenten Punktsystems  $\kappa$  Punkte beliebig gewählt werden; durch diese sind die übrigen  $q - \kappa$  Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Dieser Satz läßt sich umkehren:

**Satz VIII.<sup>o</sup>)** Können für die Bildung eines mit dem Punktsysteme  $\delta_1 \dots \delta_\sigma \dots \delta_q$  äquivalenten Punktsystems  $\kappa$  Punkte beliebig gewählt werden, und sind dadurch die übrigen  $q - \kappa$  Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt, so hat das System  $\delta_1 \dots \delta_\sigma \dots \delta_q$  den Überschufs  $\kappa$ .

Beweis: Hätte das System  $\delta_1 \dots \delta_\sigma \dots \delta_q$  den von  $\kappa$  verschiedenen Überschufs  $\kappa_1$ , so könnten zur Bildung eines mit ihm äquivalenten Punktsystems  $\kappa_1$  ( $\geq \kappa$ ) Punkte beliebig gewählt werden, und durch diese  $\kappa_1$  Punkte wären die übrigen  $q - \kappa_1$  Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt, was der Voraussetzung widerspricht.

Hieran schließt sich der weitere, wichtige Satz:

**Satz IX<sup>0</sup>)** Äquivalente Punktsysteme haben denselben Überschufs.

Beweis: Angenommen, irgend eines der zu  $\tau$  gehörigen äquivalenten Punktsysteme, etwa das System  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\sigma \dots \varepsilon_q$ , habe den Überschufs  $\kappa$ . Für die Bildung irgend zweier mit  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\sigma \dots \varepsilon_q$  äquivalenter Punktsysteme  $\beta_1 \dots \beta_\sigma \dots \beta_q$  und  $\delta_1 \dots \delta_\sigma \dots \delta_q$  können dann nach Satz VII<sup>0</sup>) je  $\kappa$  Punkte beliebig angenommen werden, wodurch die übrigen  $q - \kappa$  Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmt sind. Da aber auch  $\beta_1 \dots \beta_q$  und  $\delta_1 \dots \delta_q$  mit einander äquivalent sind, so folgt aus Satz VIII<sup>0</sup>), daß jedes dieser zwei beliebigen Systeme den Überschufs  $\kappa$  hat. — Damit ist der Satz bewiesen.

Besitzt das System  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  der Unstetigkeitspunkte einer Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q$  den Überschufs  $\kappa$ , so haben nach dem letzten Satze alle  $\infty$ -vielen mit einander und mit  $\gamma_1 \dots \gamma_r$  äquivalenten Systeme von je  $q$  getrennt oder vereinigt liegenden Punkten von  $T$ , welche den  $\infty$ -vielen möglichen Werten von  $\tau$  entsprechen, denselben Überschufs  $\kappa$ . Aus diesem Grunde nennen wir die Zahl  $\kappa$ , die wir zuerst als Überschufs des Systems  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  der Unstetigkeitspunkte von  $\tau$  bezeichnet hatten, auch wohl den Überschufs der Funktion  $\tau$ . — Aus dem Vorigen ergibt sich zugleich, daß die Funktionen  $\tau$ ,  $\tau - a$ ,  $\frac{\tau - a}{\tau - b}$  denselben Überschufs haben.

Zum Schlusse noch einige Bemerkungen. — Ist  $\tau$  eine Funktion I. Gattung vom Überschusse  $\kappa$ , und ist keiner der in den wesentlichen Gleichungen 5<sup>0</sup>) auftretenden Punkte  $\gamma_{\pi_\beta}$  ( $\beta = 1 \dots q - \kappa$ ) identisch mit einem der Punkte  $\gamma_{r_\alpha}$

( $\alpha = 1 \dots \kappa$ ) in den überzähligen Gleichungen 4<sup>o</sup>), so nennen wir die  $q - \kappa$  Punkte  $\gamma_{\pi_1} \dots \gamma_{\pi_{q-\kappa}}$  die wesentlichen, die  $\kappa$  Punkte  $\gamma_{\nu_1} \dots \gamma_{\nu_\kappa}$  die notwendigen Punkte des Systems  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$ , und diese Trennung der wesentlichen Punkte von den notwendigen ist unter den obigen Voraussetzungen immer möglich. Namentlich ist die Scheidung der Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  in wesentliche und notwendige stets möglich, wenn alle diese Unstetigkeitspunkte von  $\tau$  von der Ordnung 1 sind. — Durch Angabe der wesentlichen Punkte sind die notwendigen völlig bestimmt.

Sind Punkte  $\gamma_{\nu_\alpha}$  identisch mit Punkten  $\gamma_{\pi_\beta}$ , so ist unter Umständen eine solche Trennung der Unstetigkeitspunkte von  $\tau$  in wesentliche und notwendige nicht mehr möglich. Dieses trifft stets zu, wenn im hyperelliptischen Falle (siehe Kapitel V) eine Funktion I. Gattung in einem Verzweigungspunkte  $\alpha$  der zweiblättrigen hyperelliptischen Fläche  $T$  zu einer höheren als der zweiten Ordnung verschwindet. Betrachtet man z. B.\*) die Funktion I. Gattung  $(z - \alpha)^{-q}$ , wo  $1 < q \leq p - 1$  ist, so zerfällt das zugehörige Gleichungssystem 3<sup>o</sup>) in die wesentlichen Gleichungen:

$$w'(\alpha) = 0, w^{(3)}(\alpha) = 0, \dots w^{(2q-1)}(\alpha) = 0,$$

und die  $q$  notwendigen Gleichungen:

$$w''(\alpha) = 0, w^{(4)}(\alpha) = 0, \dots w^{(2q)}(\alpha) = 0.$$

Eine Scheidung der Unstetigkeitspunkte in  $q$  wesentliche und  $q$  notwendige ist jedoch unmöglich. Ist nämlich  $q$  ungerade, so zieht das  $q$ -malige Verschwinden von  $w'$  in  $\alpha$  nur ein einmaliges weiteres Verschwinden von  $w'$  in  $\alpha$  nach sich; ist  $q$  gerade, so folgt aus der Annahme, daß  $w'$  zur Ordnung  $q$  in  $\alpha$  verschwindet, nicht noch ein weiteres Verschwinden von  $w'$  in diesem Punkte.

Die allgemeine, genaue Charakterisierung der Fälle, in welchen eine Trennung der Punkte eines Punktsystems I. Gattung in wesentliche und notwendige nicht mehr möglich ist, steht zur Zeit noch aus und fordert eingehendere Untersuchungen.

---

\*) Rost, l. c. pag. 63, Anm. 4.

## § 30. Funktionen erster Gattung.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß die Funktionen I. Gattung, die wir zunächst definiert hatten als Funktionen, die sich als Quotient zweier Integranden I. Gattung darstellen lassen, auch dadurch charakterisiert werden können, daß für jede solche Funktion die Ungleichheit:

$$1^{\circ) \quad} q - \alpha < p$$

besteht, wenn  $\alpha$  den Überschufs dieser Funktion bedeutet. — Im Folgenden sollen die wichtigsten aus diesen beiden Definitionsformen sich ergebenden Eigenschaften der Funktionen I. Gattung abgeleitet werden.

**Satz I<sup>o</sup>)** Die Ordnung  $q$  einer Funktion I. Gattung ist höchstens gleich  $2p - 2$ .

Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, daß ein Integrand I. Gattung außer den allen Integranden I. Gattung gemeinsamen, im Unendlichen gelegenen Nullpunkten, nur noch  $2p - 2$  im Endlichen gelegene weitere Nullpunkte erster Ordnung besitzt.

Aus Satz I<sup>o</sup>) folgt, daß Funktionen der Klasse von der Ordnung  $q > 2p - 2$  notwendig Funktionen II. Gattung sind.

Daß es wirklich Funktionen I. Gattung von der höchsten erreichbaren Ordnung  $q = 2p - 2$  giebt, beruht auf folgendem Satze über Integranden I. Gattung:

**Satz II<sup>o</sup>)** Außer den  $n$  im Unendlichen gelegenen Nullpunkten zweiter Ordnung, die allen Integranden I. Gattung gemeinsam sind, giebt es keinen weiteren Punkt von  $T$ , der Nullpunkt aller Integranden I. Gattung sei.

Beweis: Gäbe es unter den  $2p - 2$  im Endlichen gelegenen Nullpunkten des allgemeinen Integranden I. Gattung

$$w' = c_1 \cdot u'_1 + \dots + c_p \cdot u'_p$$

einen allen Integranden I. Gattung, also auch den Normalintegranden  $u'_1 \dots u'_p$  gemeinsamen festen Nullpunkt  $\epsilon$  erster oder höherer Ordnung, so würde das Normalintegral II. Gattung  $t(o, \epsilon)$ , das nach Früherem am Querschnitte  $b_1$

den Periodizitätsmodul  $-2u'_1(\varepsilon)$  besitzt, in  $T'$  lauter verschwindende Periodizitätsmoduln haben, also eine Funktion der Klasse sein, die nur in einem einzigen Punkte von  $T$ , und zwar zur ersten Ordnung, unstetig wird. Funktionen dieser Art sind aber für  $p > 0$  unmöglich.

Aus Satz II<sup>o</sup>) folgt sogleich, daß man zwei Integranden I. Gattung  $w'_1$  und  $w'_2$  stets so bestimmen kann, daß keiner der im Endlichen gelegenen Nullpunkte von  $w'_1$  mit einem der im Endlichen gelegenen Nullpunkte von  $w'_2$  zusammenfällt. Denkt man sich dies ausgeführt, so ist der Quotient  $\frac{w'_2}{w'_1}$  eine Funktion I. Gattung von der Ordnung  $2p - 2$ .

Ein Punktsystem I. Gattung von der Ordnung  $2p - 2$  nennen wir ein vollständiges Punktsystem I. Gattung.\*)

Beispiel: Enthält eine Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q = 2p - 2$   $p$  oder mehr verfügbare Konstanten, von denen eine additiv ist, so hat diese Funktion nach dem Riemann-Roch'schen Satze den Überschufs

$$x \geq p - 1.$$

Es ist daher

$$q - x \leq p - 1,$$

d. h.  $\tau$  ist eine Funktion I. Gattung.

An Stelle der Ungleichheit 1<sup>o</sup>) schreiben wir von hier an die Gleichung:

$$2^o) \quad q - x = p - \lambda - 1,$$

wo  $\lambda$  eine Zahl aus der Reihe  $0, 1, 2, 3, \dots, p - 2$  bedeutet. Ist nun das System  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$ , das den Punkt  $\gamma_\rho$  allgemein  $n_\rho$ -mal enthält, das System der Unstetigkeitspunkte einer Funktion  $\tau$  I. Gattung vom Überschusse  $x$  und der

Ordnung  $q = \sum_{\rho=1}^r n_\rho$ , so bestimmen die  $q - x = p - \lambda - 1$  wesentlichen Gleichungen 5<sup>o</sup>) des vorigen Paragraphen nur  $p - \lambda - 1$  von den  $p$  Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  des allgemeinen Integranden I. Gattung  $w' = \sum_{\mu=1}^p c_\mu u'_\mu$ ;  $\lambda + 1$  von diesen

\*) Christoffel: Brioschi's Annalen, Serie II, Bd. IX. Febr. 1878.

Koeffizienten bleiben also willkürlich, und durch sie drücken sich die andern aus. Dies giebt den

**Satz III<sup>9)</sup>** Hat ein Punktsystem I. Gattung  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$ , das den Punkt  $\gamma_\rho$  allgemein  $n_\rho$ -mal enthält, die Ordnung  $q = \Sigma n_\rho$  und den Überschufs  $\kappa$ , und ist

$$q - \kappa = p - \lambda - 1,$$

so reduziert sich der allgemeine Integrand I. Gattung, der in jedem Punkte  $\gamma_\rho$  zur entsprechenden Ordnung  $n_\rho$  verschwindet, auf die Form:

$$3^9) \quad w' = c_1 \cdot u'_1 + \dots + c_{\lambda+1} \cdot u'_{\lambda+1},$$

wo  $c_1 \dots c_{\lambda+1}$  verfügbare Konstanten sind, und  $u'_1 \dots u'_{\lambda+1}$  linearunabhängige Integranden I. Gattung bezeichnen, die alle in jedem Punkte  $\gamma_\rho$  zur Ordnung  $n_\rho$  verschwinden.

Die  $q - \kappa = p - \lambda - 1$  wesentlichen Gleichungen 5<sup>9)</sup> des vorigen Paragraphen reichen also nicht aus zur vollständigen Bestimmung des allgemeinen Integranden I. Gattung. Dieser letztere ist, nachdem man ihm die Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$  als Nullpunkte von den Ordnungen  $n_1 \dots n_\rho \dots n_r$  aufgeprägt hat, erst dann bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, wenn man ihm noch weitere  $\lambda$  von einander unabhängige Bedingungen auferlegt. Aus diesem Grunde nennen wir, mit Christoffel, die Zahl  $\lambda$  den Defekt des Punktsystems I. Gattung  $\gamma_1 \dots \gamma_\rho \dots \gamma_r$ .

Ist die Funktion  $\tau$  I. Gattung von der Ordnung  $q = 2p - 2$ , und bezeichnet  $\kappa$  den Überschufs,  $\lambda$  den Defekt des Systems  $\gamma_1 \dots \gamma_{2p-2}$  ihrer Unstetigkeitspunkte, so giebt es nach Satz III<sup>9)</sup>  $\lambda + 1$  linearunabhängige Integranden I. Gattung, die alle in diesen Punkten verschwinden. Wäre nun  $\lambda > 0$ , so gäbe es mindestens zwei linearunabhängige Integranden I. Gattung  $w'_1$  und  $w'_2$  mit denselben  $2p - 2$  Nullpunkten im Endlichen; der Quotient  $\frac{w'_1}{w'_2}$  wäre dann eine Funktion I. Gattung, die in  $T$  nirgends unstetig wird,

also eine Konstante, d. h. die zwei Integranden  $w'_1, w'_2$  waren nicht linearunabhängig. Die Annahme  $\lambda > 0$  führt daher auf einen Widerspruch. — Hat demnach eine Funktion I. Gattung die Ordnung  $q = 2p - 2$ , so ist ihr Defekt  $\lambda = 0$  und ihr Überschufs  $\kappa = p - 1$ . Hieraus folgt sogleich: schreibt man dem allgemeinen Integranden I. Gattung  $w'$  irgend  $p - 1$  Nullpunkte vor, so sind dadurch die übrigen  $p - 1$  Nullpunkte im allgemeinen eindeutig bestimmt, und nur dann nicht eindeutig bestimmt, wenn sich unter den Gleichungen, die ausdrücken, daß der Integrand in den  $p - 1$  ersten Punkten Null wird, überzählige befinden. Ein Beispiel hierzu findet sich bei Herrn Rost. l. c. pag. 63, Anmerkung 7.

Hat eine Funktion I. Gattung  $\tau = \frac{w'_2}{w'_1}$  mit den Unstetigkeitspunkten  $\gamma_1 \dots \gamma_q$ , von denen auch mehrere identisch sein können, die Ordnung  $q < 2p - 2$ , so besitzt der Nenner  $w'_1$  außer  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  noch weitere  $q' = 2p - 2 - q$  Nullpunkte

$$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'},$$

was wir kurz dadurch andeuten, daß wir schreiben:

$$w'_1 = w'_1(o; \gamma_1 \dots \gamma_q; \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}).$$

Das Punktsystem  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$ , das  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  zu einem vollständigen ergänzt, möge ein zum System  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  komplementäres Punktsystem heißen. Bezeichnet man ferner die Nullpunkte von  $\tau$  mit  $\delta_1 \dots \delta_q$ , so daß

$$4^0) \quad \tau = \frac{w'_2(o; \delta_1 \dots \delta_q; \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'})}{w'_1(o; \gamma_1 \dots \gamma_q; \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'})}$$

ist, so nennen wir die zwei Punktsysteme  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  und  $\delta_1 \dots \delta_q$ , welche dasselbe komplementäre Punktsystem besitzen, korresiduale Punktsysteme. Für dieselben gilt der

**Satz IV<sup>0</sup>)** Korresiduale Punktsysteme haben gleichen Überschufs und gleichen Defekt.

Beweis: Daß die zwei korresidualen Punktsysteme  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  und  $\delta_1 \dots \delta_q$  denselben Überschufs haben, folgt direkt aus Satz IX<sup>0</sup>) des vorigen Paragraphen. — Daß ihre

Defekte  $\lambda$  und  $\lambda_1$  einander gleich sind, ergibt sich ohne weiteres aus den beiden Beziehungen:

$$q - \kappa = p - \lambda - 1,$$

$$q - \kappa = p - \lambda_1 - 1.$$

Nach diesem Satze haben alle zur Funktion I. Gattung  $\tau$  gehörigen äquivalenten Punktsysteme denselben Überschufs  $\kappa$  und denselben Defekt  $\lambda$ ; wir nennen deshalb auch kurz  $\tau$  eine Funktion I. Gattung mit dem Überschufs  $\kappa$  und dem Defekt  $\lambda$ . Jede mit  $\tau$  in einer lineo-linearen Relation stehende Funktion  $\sigma = \frac{A \cdot \tau + B}{\tau - C}$ , wo  $A, B, C$  Konstanten bedeuten, ist ebenfalls eine Funktion I. Gattung mit dem Überschufs  $\kappa$  und dem Defekt  $\lambda$ .

Wir betrachten nun auch das zu  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  komplementäre Punktsystem  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$ . Von diesem Systeme wissen wir nicht von vornherein, ob es ein Punktsystem der Klasse ist oder nicht; wir können von ihm zunächst nur das eine sagen, daß es jedenfalls einen Defekt besitzt, für den vorerst auch der Wert 0 in Aussicht zu nehmen ist, daß es also, wenn es ein Punktsystem der Klasse ist, jedenfalls ein Punktsystem I. Gattung ist, und daß es dann und nur dann ein Punktsystem der Klasse ist, wenn es einen von Null verschiedenen Überschufs besitzt. — Führen wir nun zur Untersuchung des Systems  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$  seinen Überschufs  $\kappa'$  und seinen Defekt  $\lambda'$  als Unbekannt ein, so ergibt sich eine wichtige Beziehung zwischen  $\kappa$  und  $\lambda$  einerseits und  $\kappa'$  und  $\lambda'$  andererseits.

Denkt man sich nämlich den Nenner  $w'_1$  von  $\tau$  so bestimmt, daß er in den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  verschwindet, so bleiben nach Satz III<sup>9)</sup> noch  $\lambda$  Nullpunkte von  $w'_1$  zur Verfügung. Wählen wir diese beliebig, so sind dadurch die übrigen  $q' - \lambda$  Nullpunkte von  $w'_1$  im allgemeinen eindeutig bekannt. Diese  $\lambda$  willkürlichen Punkte seien so gewählt, daß das zu  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  komplementäre System  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$  entsteht. Soll nun  $\tau$  nur die Ordnung  $q$  besitzen, so muß auch der Zähler  $w'_2$  so bestimmt werden, daß er in den nämlichen Punkten  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$  verschwindet. Da aber das System  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$  den Defekt  $\lambda'$  besitzt, so ist  $w'_2$  dadurch, daß man ihm die Punkte  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$  als Nullpunkte aufprägt,



noch nicht vollkommen bestimmt, sondern es bleiben noch  $\lambda'$  Nullpunkte von  $w'_2$ , also ebensoviel Nullpunkte von  $\tau$  zur Verfügung. Nach dem Riemann-Roch'schen Satze bleiben aber, wenn man einer Funktion  $\tau$  mit dem Überschusse  $\kappa$  die Unstetigkeitspunkte aufgeprägt hat, noch  $\kappa$  Nullpunkte von  $\tau$  zur Verfügung. Es ist daher:

$$5^\circ) \quad \lambda' = \kappa.$$

Aus den Beziehungen:

$$\begin{aligned} q - \kappa &= p - \lambda - 1, \\ q' - \kappa' &= p - \lambda' - 1, \\ q + q' &= 2p - 2, \end{aligned}$$

in denen, wie eben bewiesen,  $\lambda' = \kappa$  ist, folgt dann noch, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$6^\circ) \quad \lambda = \kappa'.$$

Dies giebt den

**Satz V<sup>o</sup>)** Hat das Punktsystem I. Gattung  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  ( $q < 2p - 2$ ) den Überschufs  $\kappa$  und den Defekt  $\lambda$ , so hat das zu ihm komplementäre Punktsystem  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$ , ( $q' + q = 2p - 2$ ) den Überschufs  $\lambda$  und den Defekt  $\kappa$ .

Dieser Satz, aus dem noch folgt, daß das System  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q'}$  dann und nur dann ein Punktsystem I. Gattung ist, wenn der Defekt  $\lambda$  des Systems  $\gamma_1 \dots \gamma_q \geq 1$  ist, ist identisch mit dem sogenannten Reciprozitätsgesetz der Herren Brill und Nöther.\*) Aus 5<sup>o</sup>) und 6<sup>o</sup>) lassen sich nämlich ohne Mühe die Relationen

$$\begin{aligned} q - 2\kappa &= q' - 2\kappa', \\ q + 2\lambda &= q' + 2\lambda' \end{aligned}$$

ableiten, welche ausdrücken, daß jedes zu  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  komplementäre Punktsystem umgekehrt wieder das System  $\gamma_1 \dots \gamma_q$  zum komplementären Punktsystem hat.

## § 31. Funktionen zweiter Gattung.

Verschwindet der allgemeine Integrand  $w' = \sum_{\mu=1}^p c_{\mu} u'_{\mu}$  identisch, wenn man ihm die Bedingung auferlegt, in den Unstetigkeitspunkten  $\gamma_{\varrho}$  ( $\varrho = 1 \dots r$ ) einer Funktion  $\tau$  der Klasse jedesmal zu derselben Ordnung  $n_{\varrho}$  zu verschwinden, zu der  $\tau$  in  $\gamma_{\varrho}$  unstetig wird, so heisst  $\tau$ , nach Früherem, eine Funktion II. Gattung. Nach § 29, Satz IV<sup>o</sup>), ist diese Definition nichts anderes als der Ausdruck dafür, dass für jede Funktion  $\tau$  II. Gattung

$$1^{\circ}) \quad q - \kappa = p$$

ist, wenn  $q$  die Ordnung und  $\kappa$  den Überschuss von  $\tau$  bezeichnet.

Da  $\kappa \geq 1$  ist, so folgt aus 1<sup>o</sup>) unmittelbar:

**Satz I<sup>o</sup>)** Die niedrigste Ordnung  $q$ , zu der es Funktionen zweiter Gattung geben kann, ist

$$q = p + 1.$$

Hieraus und aus Satz I<sup>o</sup>) des vorigen Paragraphen ergibt sich: Funktionen der Klasse, deren Ordnung  $q < p + 1$  ist, sind Funktionen I. Gattung; Funktionen, deren Ordnung  $q > 2p - 2$  ist, sind Funktionen II. Gattung. Für  $p = 2$  z. B. ist  $2p - 2 = p$ ,  $p + 1 = 3$ . Für  $p = 2$  sind daher alle etwa existierenden Funktionen von der Ordnung 2 Funktionen I. Gattung, alle Funktionen, deren Ordnung gröfser als 2 ist, Funktionen II. Gattung.

Weierstrafs hat (in Vorlesungen von 1869 an) die in Satz I<sup>o</sup>) nachgewiesene Minimalordnung von Funktionen II. Gattung zur Definition des Geschlechtes  $p$  benutzt.

Es sei nun wieder  $\gamma_1 \dots \gamma_{\varrho} \dots \gamma_r$  das System der Unstetigkeitspunkte einer Funktion  $\tau$  II. Gattung  $n_1 \dots n_{\varrho} \dots n_r$  die zugehörigen Ordnungszahlen, und

$$2^{\circ}) \quad w^{(\mu_{\kappa}+1)}(\gamma_{\pi_1})=0, \dots w^{(\mu_{\kappa}+\beta)}(\gamma_{\pi_{\beta}})=0, \dots w^{(\mu_{\kappa}+p)}(\gamma_{\pi_p})=0$$

die wesentlichen Gleichungen des zum System  $\gamma_1 \dots \gamma_{\varrho} \dots \gamma_r$  gehörigen Gleichungssystems 3<sup>o</sup>) des § 29. Es lassen sich

dann Integranden I. Gattung nachweisen, die dem System 2°) in eigentümlicher Weise zugeordnet sind.

Da die Gleichungen 2°) von einander unabhängig sind, lassen sie sich auch erfüllen, wenn wir auf der rechten Seite die Null durch beliebige Konstanten ersetzen, d. h. die Koeffizienten  $c_1 \dots c_p$  von  $w' = \sum c_\mu u'_\mu$  lassen sich so bestimmen, daß die  $p$  Gleichungen:

$$3^\circ) \quad w^{(\mu\kappa+\beta)}(\gamma_{\pi\beta}) = A_\beta \quad (\beta = 1, 2 \dots p)$$

erfüllt sind, wo  $A_1 \dots A_\beta \dots A_p$  willkürliche Konstanten bedeuten. Bezeichnet man die Determinante dieser  $p$  Gleichungen mit  $\Delta$ , so ergibt sich:

$$4^\circ) \quad c_\mu = B_{1\mu} \cdot A_1 + B_{2\mu} \cdot A_2 + \dots + B_{\beta\mu} \cdot A_\beta + \dots + B_{p\mu} \cdot A_p, \\ (\mu = 1, \dots p)$$

worin allgemein:

$$5^\circ) \quad B_{\beta\mu} = \frac{\Delta_{\beta\mu}}{\Delta}$$

ist, und  $\Delta_{\beta\mu}$  die zu  $u^{(\mu\kappa+\beta)}(\gamma_{\pi\beta})$  gehörige Subdeterminante von  $\Delta$  bezeichnet. Setzt man diese Werte von  $c_\mu$  ( $\mu = 1 \dots p$ ) ein, so wird  $w'$  lineare und homogene Funktion der  $p$  Konstanten  $A$ :

$$w'(o) = A_1 \cdot \sum_{\mu=1}^p B_{1\mu} \cdot u'_\mu + A_2 \cdot \sum_{\mu=1}^p B_{2\mu} \cdot u'_\mu + \dots + A_p \cdot \sum_{\mu=1}^p B_{p\mu} \cdot u'_\mu,$$

oder

$$w'(o) = \sum_{\sigma=1}^p A_\sigma \cdot \sum_{\mu=1}^p B_{\sigma\mu} \cdot u'_\mu(o),$$

d. h.

$$6^\circ) \quad w'(o) = \sum_{\sigma=1}^p A'_\sigma \cdot U'_\sigma(o),$$

wo

$$7^\circ) \quad U'_\sigma(o) = \sum_{\mu=1}^p B_{\sigma\mu} \cdot u'_\mu(o)$$

ist.

Da nun nach 3°)

$$A_\beta = \sum_{\sigma=1}^p A_\sigma \cdot U'_\sigma(u^{(\mu\kappa+\beta)}(\gamma_{\pi\beta}))$$

ist, so folgt aus dem Umstande, daß  $A_1 \dots A_p$  willkürliche Konstanten sind:

$$8^\circ) \quad \begin{cases} U_\beta^{(\mu_\pi + \beta)}(\gamma_{\pi\beta}) = 1, \\ U_\sigma^{(\mu_\pi + \beta)}(\gamma_{\pi\beta}) = 0, \quad \text{für } \sigma \neq \beta. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser  $p$  linear unabhängigen Integranden  $U'_\sigma$  läßt sich, für den Fall einer Funktion  $\tau$  II. Gattung, die in § 29, 12<sup>o</sup>) gegebene Darstellung einer Funktion  $\tau$  der Klasse etwas umformen. Berücksichtigt man nämlich, daß nach 6<sup>o</sup>) dieses Paragraphen:

$$w^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}) = \sum_{\sigma=1}^p A_\sigma \cdot U_\sigma^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha})$$

ist, so folgt aus 6<sup>o</sup>) des § 29:

$$\sum_{\beta=1}^p c_{\alpha\beta} w^{(\mu_\pi + \beta)}(\gamma_{\pi\beta}) = \sum_{\sigma=1}^p A_\sigma \cdot U_\sigma^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}),$$

d. h. nach 3<sup>o</sup>)

$$\sum_{\beta=1}^p c_{\alpha\beta} \cdot A_\beta = \sum_{\sigma=1}^p A_\sigma \cdot U_\sigma^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}).$$

Da die Konstanten  $A_1 \dots A_p$  willkürlich sind, so folgt schließlich allgemein

$$9^\circ) \quad c_{\alpha\beta} = U_\beta^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}), \quad \text{für } \beta = 1, 2 \dots p,$$

und die in 12<sup>o</sup>), § 29 auftretenden Funktionen  $\tau_\alpha$  der Klasse nehmen die Form an:

$$10^\circ) \quad \tau_\alpha = t^{(\mu_\alpha)}(o, \gamma_{\nu_\alpha}) - \sum_{\beta=1}^p U_\beta^{(\mu_\alpha)}(\gamma_{\nu_\alpha}) \cdot t^{(\mu_\pi + \beta)}(\gamma_{\pi\beta}).$$

Sind namentlich die Unstetigkeitspunkte von  $\tau$  alle von der ersten Ordnung und bezeichnet man die Punkte  $\gamma_{\nu_\alpha}$  kurz mit  $\gamma_\alpha$ , die Punkte  $\gamma_{\pi\beta}$  mit  $\gamma_\beta$ , so ist

$$11^\circ) \quad \tau_\alpha = t(o, \gamma_\alpha) - \sum_{\beta=1}^p U'_\beta(\gamma_\alpha) \cdot t(o, \gamma_\beta).$$

Ist hierin  $\gamma_\alpha$  kein Nullpunkt von  $U'_\beta$  ( $\beta = 1 \dots p$ ), so ist  $\tau_\alpha$  eine Funktion der Klasse von der niedrigsten bei Funktionen

II. Gattung möglichen Ordnung  $p + 1$ , und zwar hat, wie 11<sup>o</sup>) zeigt,  $\tau_\alpha$  im Punkte  $\gamma_\alpha$  das Residuum 1, im Punkte  $\gamma_\beta$  das Residuum  $-U'_\beta(\alpha)$ .

Funktionen dieser Art hat zuerst Weierstraß gebildet, um dann von ihnen aus zu den Integranden I. Gattung zu gelangen.

### § 32. Die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ .

Gemäß der Definition der Funktionen I. Gattung als Quotienten zweier Integranden I. Gattung sind für  $p = 0$  und  $p = 1$  keine Funktionen I. Gattung möglich. Grundgleichungen  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  vom Geschlechte  $p = 0$  oder  $p = 1$  liefern also nur Funktionen II. Gattung.

I<sup>o</sup>)  $p = 0$ : Die Klasse der Funktionen, die zu einer Grundgleichung vom Geschlecht  $p = 0$  gehören, enthält nach Satz III<sup>o</sup>) § 19 keinen Integranden I. Gattung und liefert daher auch kein Integral I. Gattung. Dagegen giebt es für  $p = 0$  immer noch Integrale II. Gattung, und die früher gegebene Ableitung derselben zeigt, wie man bei gegebener Grundgleichung ein solches Integral  $t(o, \varepsilon)$  bilden kann. Für  $p = 0$  besitzt aber  $t(o, \varepsilon)$  keine Periodizitätsmoduln mehr, da die Riemann'sche Fläche  $T$  für  $p = 0$  ohne Querschnitte einfach zusammenhängend ist.  $t(o, \varepsilon)$  ist also für  $p = 0$  eine algebraische Funktion der Klasse von der Ordnung 1 und dem Residuum 1 im Unstetigkeitspunkte  $\varepsilon$ .

Bezeichnen wir dieses Integral kurz mit  $\sigma$ , so besteht nach Satz I<sup>o</sup>) § 13 zwischen  $\sigma$  und einer beliebigen Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q$  eine algebraische Gleichung von der Form:

$$\psi\left(\begin{smallmatrix} 1 & q \\ \tau, \sigma \end{smallmatrix}\right) = 0;$$

jede Funktion  $\tau$  der Klasse ist also rationale Funktion von  $\sigma$ , und dies gilt auch von der ursprünglichen unabhängigen Variablen  $z$ . Bildet man daher das Integral der Klasse

$$J = \int \tau \cdot dz,$$

so ist

$$J = \int R(\sigma) \cdot d\sigma,$$

wo  $R(\sigma)$  eine rationale Funktion von  $\sigma$  bezeichnet. — Die Theorie der Funktionen der Klasse  $p = 0$  und ihrer Integrale ist somit nichts anderes als die Theorie der rationalen Funktionen einer Variablen und ihrer Integrale.

II<sup>o</sup>)  $p = 1$ : Ist die zur irreducibelen Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  gehörige Riemann'sche Fläche  $T$  vom Geschlecht  $p = 1$ , so ist die Anzahl  $r$  ihrer Doppelpunkte gleich

$$(m - 1)(n - 1) - 1,$$

und es existiert ein und nur ein auf ihr überall endliches Integral

$$w = \int \frac{\varphi\left(\begin{smallmatrix} n-2 & m-2 \\ s & z \end{smallmatrix}\right)}{F''(s, z)} dz.$$

Dieses Integral ist eindeutig in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T'$ , die sich ergibt, wenn man in  $T$  ein Querschnittpaar  $a, b$  anlegt (Fig. 25a), wo noch an der Kreuzungsstelle  $P$  die Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma$  analog wie in Fig. 33 hinzuzudenken sind, und besitzt in  $T'$  zwei konstante Periodizitätsmoduln

$$\omega_1 = \int \left| \begin{smallmatrix} \gamma \\ b \\ \beta \end{smallmatrix} \right| dw, \quad \omega_2 = \int \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ a \\ \beta \end{smallmatrix} \right| dw,$$

genau wie das Riemann'sche elliptische Integral I. Gattung.

Jede Funktion  $\tau$  der Klasse ist, als Funktion von  $w$  aufgefaßt, einwertig und doppelperiodisch mit den Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .\*) Unter diesen Funktionen giebt es Funktionen von der niedrigsten Ordnung  $p + 1 = 2$ . Sei  $\sigma$  eine solche. Dann ist  $\sigma$  als Funktion von  $w$  von der Ordnung 2, und zwischen ihr und ihrer Ableitung  $\sigma' = \frac{d\sigma}{dw}$  besteht nach

\*) Siehe Satz I<sup>o</sup>) § 48.

bekannten Sätzen aus der Theorie der einwertigen, doppelperiodischen Funktionen eine algebraische Gleichung von der Form:

$$\sigma'^2 = F_4,$$

wo  $F_4$  eine ganze Funktion von  $\sigma$  bezeichnet von einem Grade, der die Zahl 4 nicht überschreiten kann. Es ist daher

$$\left(\frac{d\sigma}{dw}\right) = A(\sigma - \alpha)(\sigma - \beta)(\sigma - \gamma)(\sigma - \delta),$$

wo  $A$  eine positive Konstante bedeutet, und  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  Konstanten bezeichnen, deren Werte von einander verschieden sind. Hieraus ergibt sich

$$w = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{A}} \cdot d\sigma}{\sqrt{(\sigma - \alpha)(\sigma - \beta)(\sigma - \gamma)(\sigma - \delta)}};$$

das einzige für  $p = 1$  existierende Integral I. Gattung hat also genau die Form des Riemann'schen elliptischen Integrals I. Gattung.

Zu der Funktion  $\sigma$  der Klasse von der Ordnung 2 nehmen wir nun noch eine weitere Funktion  $S$  der Klasse von der Ordnung  $\mu = 2\nu + 1$ ; wo  $\nu$  eine ganze Zahl  $\geq 1$  sei. Zwischen  $\sigma$  und  $S$  besteht dann unter allen Umständen eine irreducibele algebraische Gleichung von der Form:

$$f\left(\overset{2}{S}, \overset{\mu}{\sigma}\right) = 0.$$

Die zu dieser Gleichung gehörige Riemann'sche Fläche  $T_1$  ist zweiblättrig und kann daher nur einfache Verzweigungspunkte besitzen. Die Anzahl  $v$  dieser letzteren ist

$$v = 2p + 2(2 - 1) = 4.$$

Die Fläche  $T_1$  ist also die Fläche der elliptischen Funktionen. Da andererseits die Klasse der rationalen Funktionen von  $s$  und  $z$  identisch ist mit der Klasse der rationalen Funktionen von  $S$  und  $\sigma$ , so folgt: die Theorie des Falles  $p = 1$  ist nichts anderes als die Theorie der Funktionen auf einer elliptischen Riemann'schen Fläche, d. h. die

Theorie der einwertigen, doppelperiodischen Funktionen einer Variablen.

Beispiele: Folgende Grundgleichungen gehören zum Geschlechte  $p=1$ :

$$1^0) \quad s^6 = z(z - \alpha)^3(z - \beta)^3,$$

$$2^0) \quad s^8 = z(z - \alpha)(z - \beta),$$

$$3^0) \quad s^2 = z(z - \alpha)(z - \beta)z - \gamma,$$

$$4^0) \quad s^4 = z(z - \alpha)(z - \beta)^2.$$

Siehe E. Netto: Dissertatio: de transformatione aequationis  $y^* = R(x)$ , Berlin (1870, Schade).

---



## Kapitel V.

### Die birationalen Transformationen.

---

#### § 33. Definition der birationalen Transformationen.

Die Sätze des § 13<sup>o</sup>) geben Anlaß zur Einführung eines in der Theorie der algebraischen Funktionen sehr wichtigen Begriffes.

Ist eine Funktionenklasse des Geschlechtes  $p$  definiert durch die irreducibele algebraische Gleichung

$$1^o) \quad F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, & z \end{smallmatrix}\right) = 0,$$

so gelten für irgend zwei algebraische Funktionen  $S$  und  $Z$  der Klasse die Darstellungen:

$$2^o) \quad S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z),$$

wo  $R_1, R_2$  rationale Funktionen von  $s$  und  $z$  bedeuten.

Sind außerdem  $S$  und  $Z$  gegenseitig irreducibele (siehe § 13) Funktionen von den Ordnungen  $\mu$  und  $\nu$ , so besteht zwischen ihnen eine irreducibele, algebraische Gleichung von der Form:

$$3^o) \quad \varphi\left(\begin{smallmatrix} \nu & \mu \\ S, & Z \end{smallmatrix}\right) = 0,$$

und es läßt sich jede Funktion der Klasse, also auch  $s$  und  $z$  selbst, darstellen in der Form

$$4^o) \quad s = P_1(S, Z), \quad z = P_2(S, Z),$$

wo  $P_1, P_2$  rationale Funktionen von  $S$  und  $Z$  bezeichnen.

Diese Resultate lassen sich auch wie folgt aussprechen. Eliminiert man  $s$  und  $z$  aus 1°) mit Hilfe der rationalen Substitution 2°), so ergibt sich die Gleichung 3°) — Die Gleichungen 4°) sagen dann weiter aus: die Substitution 2°) ist rational umkehrbar, d. h.:  $s$  und  $z$  sind ebenfalls rationale Funktionen von  $S$  und  $Z$ .

Wir definieren nun:

**Definition:** Eine Transformation (Substitution)

$$S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z),$$

worin  $R_1, R_2$  rationale Funktionen von  $s$  und  $z$  bezeichnen, die so beschaffen ist, daßs umgekehrt:

$$s = P_1(S, Z), \quad z = P_2(S, Z)$$

ist, wo  $P_1, P_2$  rationale Funktionen von  $S$  und  $Z$  sind, heißt eine **birationale Transformation**.

Wir können daher auch sagen: die Grundgleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  geht durch die birationale Transformation 2°) über in  $\psi\left(\begin{smallmatrix} r & \mu \\ S, Z \end{smallmatrix}\right) = 0$ .

Diese transformierte (durch birationale Transformation erhaltene) Gleichung  $\psi = 0$  ist nichts anderes als die Bedingung dafür, daßs die drei Gleichungen

$$1^\circ) \quad F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0,$$

$$2^\circ) \quad S - R_1(s, z) = 0, \quad Z - R_2(s, z) = 0$$

durch ein gemeinsames System von Werten  $s, z$  befriedigt werden können. Die durch die Gleichungen 2°) definierte birationale Transformation umkehren, d. h. in die Form

$$4^\circ) \quad s = P_1(S, Z), \quad z = P_2(S, Z)$$

bringen, heißt nichts anderes, als dies gemeinschaftliche Wurzelsystem  $s, z$  der drei Gleichungen 1°) und 2°) bestimmen. Dabei verdient es, hervorgehoben zu werden, daßs man das System dieser Werte  $s, z$ , d. h. die Gleichungen 4°), auf algebraischem Wege finden kann, ohne die Gleichungen 1°) und 2°) wirklich aufzulösen (siehe etwa Salmon-

Fiedler, Höhere Algebra, pag. 110 ff.). Es können hierbei jedoch zwei Möglichkeiten auftreten.

1°)  $s$  und  $z$  lassen sich nicht aus den Gleichungen 2°) allein als rationale Funktionen von  $S$  und  $Z$  darstellen, sondern nur unter Hinzunahme der Grundgleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$ . Dies ist der gewöhnliche, allgemeine Fall.

2°)  $s$  und  $z$  lassen sich aus den Gleichungen 2°) allein als rationale Funktionen von  $S$  und  $Z$  darstellen, ohne Hinzunahme der Grundgleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$ . In diesem Falle definieren die Gleichungen 2°) eine sogenannte Cremonasche Transformation.

Dals birationale Transformationen der letzten Art wirklich auftreten können, möge an einem speziellen Beispiele nachgewiesen werden.

Beispiel:\*) Es sei gegeben die Grundgleichung:

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad F\left(\begin{smallmatrix} 5 & 5 \\ s, z \end{smallmatrix}\right) &= s^5 - 5s^3(z^2 + z + 1) \\ &+ 5s(z^3 + z + 1) - 2z(z^2 + z + 1) = 0, \end{aligned}$$

und die Transformationsgleichungen:

$$2^\circ) \quad S = \frac{s^2}{z^2 + z + 1}, \quad Z = \frac{s}{z - \alpha^2},$$

wo  $\alpha$  eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet.

Die Funktion  $S$  der Klasse ist von der Ordnung 2; sie wird unstetig zur ersten Ordnung in den Nullpunkten von  $z^2 + z + 1 = 0$ , und zwar jedesmal wie  $(z - \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ , wenn  $\varepsilon$  den Wert von  $z$  im betreffenden Nullpunkte von  $z^2 + z + 1 = 0$  bezeichnet. Die Funktion  $Z$  der Klasse ist von der Ordnung 3.

Aus den Gleichungen 2°) ergibt sich unmittelbar:

$$3^\circ) \quad s = \frac{(\alpha - \alpha^2)SZ}{S - Z^2}, \quad z = \frac{\alpha S - \alpha^2 Z^2}{S - Z^2},$$

---

\*) Siehe Baker, Abelian Funktionen, pag 5 u. 6.

ohne Hinzunahme der Grundgleichung  $F=0$ . Die transformierte Gleichung lautet:

$$\psi(S, Z) = Z^2 - \frac{1}{2}(1 - \alpha^2) ZS (S^2 - 5S + 5) - \alpha^2 S = 0.$$

Die Gleichungen 2<sup>o</sup>) definieren also eine Cremona'sche Transformation.

Wendet man dagegen auf die obige Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  die Transformationsgleichungen:

$$S = \frac{s^2}{z^2 + z + 1}, \quad Z = \frac{z}{s},$$

an, so lassen sich diese Gleichungen nicht rational umkehren ohne Hinzunahme der Gleichung  $F=0$ .

Da nach Früherem die durch die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  definierte Klasse algebraischer Funktionen identisch ist mit der Klasse algebraischer Funktionen, die durch die Gleichung  $\psi(S, Z) = 0$  definiert ist, so läßt sich die transformierte Gleichung  $\psi=0$  ebensowohl als definierende Grundgleichung der Klasse ansehen, wie die Gleichung  $F=0$  selbst. Es wirft sich damit von selbst die Frage auf, ob es nicht möglich ist, durch birationale Transformationen Gleichungen  $\psi=0$  zu erzielen, die möglichst einfach sind, z. B. in Bezug auf die Vielfachheit der auftretenden Verzweigungspunkte und Wurzelkoinzidenzen, oder in Bezug auf die Grade  $\nu$  und  $\mu$ . Andererseits muß auch untersucht werden, ob es für die durch die Gleichung 1<sup>o</sup>) definierte Funktionenklasse nicht vielleicht charakteristische Größen und Funktionen giebt, die sich bei Anwendung einer birationalen Transformation nicht ändern, sich einer solchen Transformation gegenüber invariant verhalten.

Von § 15 an haben wir bei allen unseren Untersuchungen vorausgesetzt, daß die definierende Grundgleichung der Klasse nur einfache Verzweigungspunkte und von sonstigen vielfachen Punkten nur Doppelpunkte aufweise. Die Berechtigung dieser Annahme gründet sich darauf, daß es möglich ist, die Grundgleichung 1<sup>o</sup>) durch

birationale Transformationen so umzuformen, daß nur noch einfache Verzweigungspunkte und gewöhnliche Doppelpunkte auftreten. Zum Beweise hierfür verweisen wir auf die Litteratur.\*)

Die übrigen vorhin aufgeworfenen Fragen sollen in den nächsten Paragraphen behandelt werden.

### § 34. Die Invarianz des Geschlechtes $p$ .

Der Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  entspricht eine Riemannsche Fläche  $T$ , die sich  $n$ -blättrig über der  $z$ -Ebene ausbreitet und die Verzweigungsart von  $s$  als Funktion von  $z$  darstellt; ebenso entspricht der durch die birationale Transformation 2°) (§ 33) aus  $F = 0$  hervorgegangenen transformierten Gleichung  $\varphi(\tilde{S}, \tilde{Z}) = 0$  eine Riemann'sche Fläche  $T_1$ , die sich  $\nu$ -blättrig über der  $Z$ -Ebene ausbreitet und die Verzweigungsart von  $S$  als Funktion von  $Z$  darstellt. Durch die birationale Transformation 2°) sind diese zwei Flächen  $T$  und  $T_1$  so aufeinander bezogen, daß jedem Punkte von  $T$  ein Punkt von  $T_1$ , und jedem Punkte von  $T_1$  ein Punkt von  $T$  entspricht. Denkt man sich ferner die Flächen von  $T$  und  $T_1$  als Riemann'sche Kugelflächen, so entspricht jeder unendlich kleinen Ortsänderung in einer der zwei Flächen eine unendlich kleine Ortsänderung in der andern, und jedem ununterbrochenen Linienzug in  $T$  ein zusammenhängender Linienzug in  $T_1$ . Den  $p$  Querschnittbündeln  $(abc)_x$  ( $x = 1 \dots p$ ), die  $T$  in eine einfachzusammenhängende Fläche  $T'$  verwandeln, entsprechen daher  $p$  Querschnittsbündel  $(a'b'c')_x$ , die  $T_1$  in eine Fläche  $T'_1$  umformen.

Diese Fläche  $T'_1$  ist 1°) zusammenhängend. Bedeuten nämlich  $P_1$  und  $P'_1$  irgend zwei Punkte in  $T'_1$ ,  $P$  und  $P'$

---

\*) Cayley, Quart. Journ. of Math. t. 7 (1865) und Journal f. Math. Bd. 64 (1865). — Hamburger, Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 16. 1871. — Nöther, Gött. Nachr. 1871, pag. 267; Math. Annalen Bd. 9 (1875) u. Bd. 23. (1883). — Halphen, Etude sur les points singuliers; Anhang zur franz. Ausg. v. Salmon's Higher plane curves, Gauth. Villars 1884. — Vergl. auch Picard, Traité d'analyse, T. II, pag. 360 ff. (1893); Appell et Goursat, Théorie des fonct. alg. et de leurs intégrales, pag. 283 (1895) und E. Vessiot, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse. 1896.

die entsprechenden Punkte von  $T'$ , so läßt sich in  $T'$  ein Weg  $l$  angeben, der von  $P$  nach  $P'$  führt, ohne einen Querschnitt zu überschreiten. Der entsprechende Weg  $l_1$  in  $T'_1$  führt dann auch in  $T'_1$  von  $P_1$  nach  $P'_1$ , ohne einen Querschnitt zu überschreiten. Die Fläche  $T'_1$  ist 2<sup>o</sup>) einfach zusammenhängend; denn wäre sie es nicht, so würde einem sie nicht zerstückelnden Querschnitt  $\lambda_1$  ein Querschnitt  $\lambda$  in  $T'$  entsprechen, der auch  $T'$  nicht zerstückelt, was unmöglich ist.  $T$  und  $T_1$  werden also durch dieselbe Anzahl Querschnitte in einfach zusammenhängende Flächen verwandelt. Das Geschlecht  $p$  dieser Flächen und auch dasjenige der zugehörigen Gleichungen  $F=0$  und  $\psi=0$  ist also dasselbe. Dies giebt den wichtigen

**Satz I<sup>o</sup>)** Das Geschlecht einer algebraischen Gleichung wird durch eine birationale Transformation nicht geändert.

Da die Gleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  und die transformierte Gleichung  $\psi\left(\begin{smallmatrix} v & \mu \\ S, Z \end{smallmatrix}\right) = 0$  dieselbe Klasse algebraischer Funktionen definieren, können wir auch sagen:  $F=0$  und  $\psi=0$  sind Gleichungen derselben Klasse. Der vorige Satz läßt sich dann auch so aussprechen:

**Satz I<sub>2</sub><sup>o</sup>)** Gleichungen derselben Klasse haben auch dasselbe Geschlecht.

Für  $p > 1$  läßt sich Satz I<sup>o</sup>) umkehren.

**Satz II<sup>o</sup>)** Läßt eine rationale Transformation

$$S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z)$$

das Geschlecht  $p(>1)$  einer algebraischen Gleichung unverändert, so ist die Transformation eine birationale.\*)

Beweis:  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  werde durch die rationale Transformation

$$S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z)$$

---

\*) Siehe die Abhandlung von Herrn Weber, Crelle's Journ. Bd. 76.

übergeführt in

$$\varphi\left(\overset{\nu}{S}, \overset{\mu}{Z}\right) = 0,$$

und es sei das Geschlecht  $p_1$  von  $\varphi = 0$  gleich dem Geschlechte  $p$  von  $F = 0$ .

Durch die rationale Transformation geht jeder Integrant I. Gattung  $\nu$  der durch  $\varphi = 0$  definierten Funktionenklasse über in eine lineare, homogene Funktion der  $p$  linear-unabhängigen Integranten I. Gattung  $u$  der durch  $F = 0$  definierten Funktionenklasse.

Ist daher allgemein:

$$v = \frac{\psi(S, Z)}{\varphi'(S, Z)}, \quad u = \frac{\varphi(s, z)}{F'(s, z)},$$

so folgt:

$$\frac{\psi_1(S, Z)}{\varphi'(S, Z)} = a_1 \frac{\varphi_1(s, z)}{F'(s, z)} + \dots + a_p \frac{\varphi_p(s, z)}{F'(s, z)},$$

$$\frac{\psi_2(S, Z)}{\varphi'(S, Z)} = b_1 \frac{\varphi_1(s, z)}{F'(s, z)} + \dots + b_p \frac{\varphi_p(s, z)}{F'(s, z)},$$

worin  $a_1 \dots a_p, b_1 \dots b_p$  konstante Koeffizienten bedeuten, und weiter

$$\frac{\psi_1(S, Z)}{\psi_2(S, Z)} = \frac{a_1 \cdot \varphi_1(s, z) + \dots + a_p \cdot \varphi_p(s, z)}{b_1 \cdot \varphi_1(s, z) + \dots + b_p \cdot \varphi_p(s, z)}.$$

Den Punkten der zu  $\varphi = 0$  gehörigen Fläche  $T_1$ , in denen  $\psi_1(S, Z) = 0$  wird, entsprechen demnach auf der zu  $F = 0$  gehörigen Fläche  $T$  Punkte, in denen

$$a_1 \varphi_1(s, z) + \dots + a_p \varphi_p(s, z) = 0$$

wird. Wenn folglich einem beliebigen Punkte von  $T_1$   $r$  Punkte von  $T$  entsprechen, so muß, da  $\psi_1(S, Z)$  in  $T_1$

und  $\sum_{x=1}^p \alpha_x \cdot \varphi_x(s, z)$  in  $T$  je  $2p - 2$  variable Nullpunkte besitzen, die Beziehung

$$r(2p_1 - 2) \leq 2p - 2$$

bestehen, welche, da  $r$  eine positive, ganze Zahl ist, für  $p_1 = p$  nur dann erfüllt sein kann, wenn

$$r = 1$$

ist. — Jedem Punkt von  $T_1$  entspricht also nur ein Punkt von  $T$ , d. h. die betrachtete rationale Transformation ist eine birationale.

Bemerkung. Ist eine algebraische Gleichung  $F(s, z) = 0$  gegeben, so erhält man, je nachdem man  $z$  oder  $s$  als unabhängige Variable ansieht, zwei verschiedene Riemann'sche Flächen  $T_s$  und  $T_z$ . Nach Satz I<sup>o</sup>) haben diese zwei Flächen dasselbe Geschlecht. Ist daher z. B. die Gleichung  $F = 0$  in Bezug auf eine der zwei Variablen, etwa in Bezug auf  $z$ , vom ersten Grade, so reduziert sich die zugehörige Riemann'sche Fläche  $T_s$  auf die einfache  $z$ -Ebene, und die Fläche  $T_z$  ist daher einfach zusammenhängend.

### § 35. Die Moduln der Klasse.

Die Grundgleichung  $F = 0$  enthält nur eine endliche Anzahl von Gliedern; die zugehörige Riemann'sche Fläche  $T$  hängt daher nur von einer endlichen Anzahl von Konstanten, nämlich den Koeffizienten von  $F = 0$  ab. Geht nun  $F = 0$  durch birationale Transformation in eine Gleichung  $\psi = 0$  über, so steht nicht ohne weiteres fest, daß die zu  $\psi = 0$  gehörige Fläche  $T_1$  von ebensoviel Konstanten abhängt, wie  $T$ . Es läßt sich im Gegenteil wohl denken, daß wir die birationale Transformation so wählen können, daß  $T_1$  von weniger Konstanten abhängt wie  $T$ . Es ergibt sich so unmittelbar die Frage, ob es eine untere Grenze für die Erniedrigung dieser Konstantenzahl giebt, und welches die niedrigste Zahl der wesentlichen, durch birationale Transformation nicht mehr wegzuschaffenden Konstanten ist, von denen die allgemeinste Gleichung  $F = 0$  oder Fläche  $T$  des Geschlechtes  $p$  abhängt. Diese wesentlichen Konstanten oder Parameter heißen nach Riemann\*) die Moduln der Klasse.

\*) Riemann, Ges. Werke, pag. 113, 114.



Durch die Koeffizienten von  $F=0$  sind die Verzweigungspunkte der zugehörigen Fläche  $T$  völlig bestimmt. Wendet man nun auf  $F=0$  eine birationale Transformation an, so lassen sich die Konstanten dieser Transformation so wählen, daß in der zur transformierten Gleichung gehörigen Fläche  $T_1$  eine bestimmte Anzahl von Verzweigungspunkten in beliebig gewählte Lagen gedrängt werden kann, während die übrigen Verzweigungspunkte in  $T_1$  fest bleiben. Die Anzahl dieser bei einer birationalen Transformation fest bleibenden Verzweigungspunkte in  $T_1$  ist die Zahl der Moduln der Klasse. Diese Zahl läßt sich, wie folgt, bestimmen.

Bezeichnet  $T$  die zur Grundgleichung  $F=0$  gehörige Riemann'sche Fläche, so denken wir uns dieselbe zunächst durch eine birationale Transformation

$$S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z),$$

in der  $Z$  eine Funktion II. Gattung von der Ordnung  $\mu > 2p - 2$  sei, in eine neue Fläche  $T_1$  verandelt, die sich  $\mu$ -blättrig über der  $Z$ -Ebene ausbreitet. Von dieser Fläche  $T_1$  gehen wir nun aus und schreiben an Stelle von  $S$  und  $Z$  wieder  $s$  und  $z$ .

Wenden wir auf  $T_1$  die birationale Transformation

$$\sigma = s, \quad \zeta = R(s, z)$$

an, wo  $\zeta$  eine Funktion II. Gattung von der Ordnung  $\mu$  sei, so besteht zwischen  $\sigma$  und  $\zeta$  eine irreducible algebraische Gleichung, die in  $\sigma$  vom Grade  $\mu$  ist; die zugehörige Fläche  $T_2$  hat also  $\mu$  Blätter, ebenso wie  $T_1$ . Der transformierenden Funktion  $\zeta$  können wir die  $\mu$  Unstetigkeitspunkte nach Belieben vorschreiben; nach dem Riemann-Roch'schen Satze enthält dieselbe dann noch

$$\kappa + 1 = \mu - p + 1$$

willkürliche Konstanten, wenn  $\kappa$  den Überschufs der Funktion  $\zeta$  bezeichnet. Im ganzen enthält also  $\zeta$

$$2\mu - p + 1$$

willkürliche Konstanten. Über diese Konstanten können wir nun, im allgemeinen, so verfügen, daß  $2\mu - p + 1$  von

den  $2(\mu + p - 1)$  einfachen Verzweigungspunkten von  $T_2$  vorgeschriebene Lagen einnehmen. Die Zahl

$$2(\mu + p - 1) - (2\mu - p + 1) = 3p - 3$$

der übrigen, durch die birationale Transformation nicht berührten, festen Verzweigungspunkte von  $T_2$  ist die Zahl der Klassenmoduln. Wir haben so den

**Satz I<sup>0</sup>)** Die Klasse vom Geschlechte  $p$  hat im allgemeinen  $3p - 3$  Moduln.

Dieser Satz gibt für  $p > 1$  nur eine obere Grenze für die Anzahl der Moduln einer Fläche  $T$  der Klasse. Wir werden später sehen, daß es für jedes  $p > 1$  Flächen der Klasse gibt, die sogenannten hyperelliptischen Flächen, die nur  $2p - 1$  Moduln besitzen, weil zwischen den Verzweigungspunkten einer solchen Fläche  $p - 2$  Relationen bestehen.

Auch die Flächen vom Geschlechte  $p = 0$  und  $p = 1$  bilden eine Ausnahme von dem vorigen allgemeinen Satz. Der Beweis dieses Satzes beruht nämlich wesentlich auf der Annahme, daß wir über die  $2\mu - p + 1$  Konstanten von  $\zeta$  so verfügen können, daß  $2\mu - p + 1$  Verzweigungspunkte von  $T_2$  eine vorgeschriebene Lage einnehmen. Diese Annahme trifft jedoch nicht mehr zu, wenn die ursprüngliche Fläche  $T_1$  in sich selbst transformiert\*) werden kann durch eine birationale Transformation

$$\sigma = s, \quad \zeta = R(s, z),$$

in der noch willkürliche Parameter übrig bleiben. Ist  $r$  die Anzahl dieser Parameter, so können die  $2\mu - p + 1$  Konstanten von  $\zeta$  nicht mehr sämtlich dazu benutzt werden, um ebensoviele Verzweigungspunkte von  $T_2$  der Lage nach zu fixieren, sondern nur noch  $2\mu - p + 1 - r$ ; die übrigen  $r$  Konstanten dienen dazu, die Möglichkeit der Transformation der Fläche  $T_1$  in sich selbst zu repräsentieren. Die Anzahl der festbleibenden Verzweigungspunkte von  $T_2$ , d. h. die Zahl der Moduln der Klasse, ist dann also

$$2(\mu + p - 1) - (2\mu - p + 1 - r) = 3p - 3 + r.**)$$

\*) Siehe den nächsten Paragraphen.

\*\*) Diese Formel rührt von Herrn Klein her. Siehe dessen Schrift: Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen. Kap. III.

Wie sich im nächsten Paragraphen ergeben wird, ist für  $p=0: r=3$ ; für  $p=1: r=1$ ; für  $p>1: r=0$ . Die Anzahl der Moduln der Klasse ist daher:

$$\begin{array}{ll} \text{für } p=0: & \text{gleich } 0, \\ \text{„ } p=1: & \text{„ } 1, \\ \text{„ } p>1: & \text{„ } 3p-3, \end{array}$$

wenn die Fläche  $T$  nicht zu den hyperelliptischen Flächen gehört.

### § 36. Transformation einer Fläche $T$ in sich selbst.

Wenn die Gleichung:

$$F(s, z) = 0,$$

zu der die Fläche  $T$  gehört, durch die birationale Transformation

$$S = R_1(s, z), \quad Z = R_2(s, z)$$

übergeführt wird in

$$F(S, Z) = 0,$$

zu der wieder dieselbe Fläche  $T$  gehört, so sagen wir: die Gleichung  $F(s, z) = 0$ , oder auch die zugehörige Fläche  $T$ , wird durch die birationale Transformation in sich selbst transformiert. — Wir wollen diese Transformation kurz besprechen und unterscheiden dabei die drei Fälle  $p=0$ ,  $p=1$  und  $p>1$ .

1<sup>o</sup>)  $p=0$ : Ist die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  vom Geschlechte  $p=0$ , so lassen sich nach § 32 alle Funktionen der Klasse, also auch  $s$  und  $z$ , als rationale Funktionen einer Funktion  $\zeta$  der Klasse darstellen. Ist z. B.

$$s = R_1(\zeta), \quad z = R_2(\zeta),$$

so entspricht jedem Werte von  $\zeta$  ein und nur ein Wert von  $s$  und ein und nur ein Wert von  $z$ , und daher jedem Punkte der  $\zeta$ -Ebene ein und nur ein Punkt der zu  $F=0$  gehörigen

Fläche  $T$ . — Umgekehrt ist  $\zeta$ , als Funktion der Klasse, rationale Funktion von  $s$  und  $z$ :

$$\zeta = R(s, z).$$

Jedem zusammengehörigen Wertepaare  $s, z$  entspricht also auch nur ein Wert von  $\zeta$ , und folglich jedem Punkte der Fläche  $T$  ein und nur ein Punkt der  $\zeta$ -Ebene. Die Fläche  $T$  vom Geschlechte  $p=0$  läßt sich daher mit Hilfe der birationalen Transformation

$$s = R_1(\zeta), \quad z = R_2(\zeta)$$

in eine einblättrige Fläche  $T_1$  überführen. Diese letztere, die einfache  $\zeta$ -Ebene, wird durch jede Transformation

$$\sigma = \frac{a\zeta - 1}{b\zeta - d}$$

mit drei willkürlichen Parametern  $a, b, d$  in sich selbst transformiert, wobei diese willkürlichen Parameter dazu benutzt werden können, um drei beliebige Punkte der  $\zeta$ -Ebene in drei beliebige andere Punkte derselben Ebene überzuführen. Dasselbe gilt also auch von der ursprünglichen Fläche  $T$ . Wir haben so den

**Satz I<sup>o</sup>)** Ist die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  vom Geschlecht  $p=0$ , so läßt sich die zugehörige Fläche  $T$  in sich selbst transformieren durch eine birationale Transformation mit  $r=3$  willkürlichen Parametern.

II<sup>o</sup>)  $p=1$ : In diesem Falle läßt sich, nach § 32, die zur Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  gehörige Fläche  $T$  durch birationale Transformation in die zweiblättrige Riemann'sche Fläche  $T_1$  mit vier Verzweigungspunkten verwandeln, die den elliptischen Funktionen entspricht. Was sich von der Transformation von  $T_1$  in sich selbst beweisen läßt, gilt also auch von der ursprünglichen Fläche  $T$ .

Es sei  $u$  das zu  $T_1$  gehörige Integral I. Gattung. Sind  $\omega_1, \omega_2$  die Periodizitätsmoduln desselben in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T'_1$ , so ist jede Funktion  $\tau$  der Klasse einwertige, doppelperiodische Funktion von  $u$ , mit

den Perioden  $\omega_1, \omega_2$ , und umgekehrt ist jede einwertige, doppelperiodische Funktion von  $u$  eine Funktion der Klasse. Bezeichnen wir demnach die Variablen in der Fläche  $T_1$  wieder mit  $s$  und  $z$ , so ist

$$1^\circ) \quad s = \varphi(u), \quad z = \varphi_1(u),$$

wo  $\varphi(u)$  und  $\varphi_1(u)$  doppelperiodische Funktionen von  $u$  bezeichnen. — Setzen wir nun

$$2^\circ) \quad S = \varphi(u + t), \quad Z = \varphi_1(u + t),$$

wo  $t$  eine willkürliche Konstante bedeutet, so sind auch  $S$  und  $Z$  einwertige, doppelperiodische Funktionen von  $u$  und daher, als Funktionen der Klasse, rational darstellbar durch  $s$  und  $z$ , d. h. es ist

$$3^\circ) \quad S = R(s, z, t), \quad Z = R_1(s, z, t),$$

wo  $R$  und  $R_1$  rationale Funktionen von  $s$  und  $z$  bezeichnen, die von dem willkürlichen Parameter  $t$  abhängen. Ebenso sind umgekehrt  $s$  und  $z$  rationale Funktionen von  $S$  und  $Z$ . Die Transformation  $3^\circ)$  ist also birational und geht außerdem, wie man leicht sieht, für  $t = 0$  in die identische Substitution

$$S = s, \quad Z = z$$

über. Wie aber leicht einzusehen ist (siehe Apell et Goursat pag. 267), geht  $u$  durch jede birationale Transformation wieder in ein Integral I. Gattung über, d. h. es ist bei Anwendung von  $3^\circ)$

$$u'(s, z) = \mu \cdot u'(S, Z),$$

wo  $\mu$ , wie sich durch Betrachtungen ähnlich den sogleich für  $p > 1$  anzustellenden ergibt, von  $t$  unabhängig ist. Da  $3^\circ)$  für  $t = 0$  in die identische Substitution  $S = s, Z = z$  übergeht, so ist  $\mu = 1$ , und es ist die birationale Transformation  $3^\circ)$  mit dem einen willkürlichen Parameter  $t$  äquivalent mit der transcendenten Beziehung:

$$4^\circ) \quad u(S, Z) = u(s, z) + C,$$

wo  $C$  eine beliebige Konstante bedeutet. Wie sich übrigens (siehe etwa Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, pag. 474 ff.) nachweisen

läßt, erhält man alle birationalen Transformationen, welche  $T$  in sich selbst überführen, indem man 4°) kombiniert mit allen Transformationen von der Form:

$$u(S, Z) = \nu \cdot u(s, z),$$

wo  $\nu$  eine primitive Wurzel einer der Gleichungen:

$$\nu^2 = 1, \nu^3 = 1, \nu^4 = 1, \nu^6 = 1$$

bedeutet. Die birationale Transformation 3°) führt also  $T_1$  in sich selbst über, und es gilt daher für  $T_1$  und folglich auch für  $T$ , der

**Satz II°)** Jede allgemeine Fläche  $T$  vom Geschlechte  $p=1$  läßt sich durch birationale Transformation in sich selbst überführen, und jede solche Transformation enthält einen willkürlichen Parameter.

Für spezielle Flächen des Geschlechtes  $p=1$  vergleiche etwa Baker, Abelian Functions, § 394.

III°)  $p > 1$ : Für diesen Fall gilt der von Herrn Schwarz (Crelle, Bd. 87) bewiesene

**Satz III°)** Eine allgemeine Gleichung oder Fläche  $T$  des Geschlechtes  $p > 1$  läßt sich nicht in sich selbst transformieren durch birationale Transformationen, die einen willkürlichen Parameter enthalten.

Beweis:\*) Angenommen, die Gleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$ , oder die zugehörige Fläche  $T$ , lasse sich in sich selbst transformieren durch eine birationale Transformation

$$3^\circ) \quad \begin{cases} S = R(s, z, t), \\ Z = R_1(s, z, t), \end{cases}$$

die den willkürlichen Parameter  $t$  enthalte. Sind dann  $u_1 \dots u_p$  die  $p$  linearunabhängigen Normalintegralen I. Gattung, so werden (siehe den nächsten Paragraphen) diese Integralen durch die birationale Transforma-

\*) Siehe Picard, *Traité d'analyse*, t. II.

Integranden I. Gattung  $u'_1(S, Z), \dots u'_p(S, Z)$  übergeführt, die sich wieder als ganze, lineare Funktionen von  $u'_1 \dots u'_p$  darstellen lassen. Ist z. B.

$$5^\circ) \quad u'_1(S, Z) = \alpha_1 \cdot u'_1(s, z) + \dots + \alpha_p \cdot u'_p(s, z)$$

wo  $\alpha_1 \dots \alpha_p$  von  $s$  und  $z$  unabhängige Konstanten bedeuten, so läßt sich beweisen, daß diese Konstanten auch von  $t$  unabhängig sind. Läßt man nämlich, indem man  $t$  einen festen, sonst beliebigen Wert beilegt, die Variable  $z$  in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T'$  vom Punkte  $\beta$  (Fig. 34) auf dem negativen Rande von  $a_1$  längs  $\bar{b}_1$  nach dem gegenüberliegenden Punkte  $\gamma$  auf dem positiven Rande von  $a_1$  gehen, so wachsen  $u_1(s, z) \dots u_p(s, z)$  um die Periodizitätsmoduln:

$$\pi i, 0, \dots 0.$$

Zugleich mit diesem Wege von  $z$  beschreibt auch  $Z$  in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T'$ , die zur transformierten Gleichung gehört, einen Ringweg, der  $u_1(S, Z)$  etwa in  $u_1(S, Z) + \omega_1$  überführe, wo  $\omega_1$  offenbar von  $t$  unabhängig ist. Es ist dann

$$\omega_1 = \alpha_1 \cdot \pi i,$$

und daher  $\alpha_1$  unabhängig von  $t$ . Läßt man  $z$  analog der Reihe nach die Ringwege  $\bar{b}_2, \dots \bar{b}_p$  in  $+$  Richtung durchlaufen, so ergeben sich die weiteren Beziehungen:

$$\omega_2 = \alpha_2 \cdot \pi i, \dots \omega_p = \alpha_p \cdot \pi i,$$

aus denen sich ergibt, daß auch  $\alpha_2 \dots \alpha_p$  von  $t$  unabhängig sind.

Nimmt man ein zweites Normalintegral  $u_2(s, z)$ , so erhält man, analog wie ftr  $u_1(s, z)$  die Beziehung:

$$6^\circ) \quad u'_2(S, Z) = \beta_1 \cdot u'_1(s, z) + \dots + \beta_p \cdot u'_p(s, z),$$

wo  $\beta_1 \dots \beta_p$  wieder von  $s, z$  und  $t$  unabhängige Konstanten sind.

Aus 5°) und 6°) folgt:

$$7^\circ) \quad \frac{u'_1(S, Z)}{u'_2(S, Z)} = \frac{\alpha_1 \cdot u'_1(s, z) + \dots + \alpha_p \cdot u'_p(s, z)}{\beta_1 \cdot u'_1(s, z) + \dots + \beta_p \cdot u'_p(s, z)}.$$

Diese Beziehung enthält nach dem Vorigen den willkürlichen Parameter  $t$  nicht mehr und weist also jedem Punkt  $s, z$  der ursprünglichen Fläche  $T$  eine endliche Anzahl von Punkten  $S, Z$  der transformierten Fläche  $T_1$  zu. Die birationale Transformation 3<sup>o</sup>) mit dem willkürlichen Parameter  $t$  weist aber, wenn wir ein Wertepaar  $s, z$  festhalten, diesem Wertepaare, bei kontinuierlicher Änderung von  $t$ , unendlich viele Wertepaare  $S, Z$  zu. Die Annahme, daß es für  $p > 1$  eine birationale Transformation mit einem willkürlichen Parameter gebe, welche die ursprüngliche Fläche  $T$  in sich selbst transformiert, führt also zu einem Widerspruch.

Für die Theorie der algebraischen Funktionen vom Geschlecht  $p > 1$  mit einer endlichen Anzahl von birationalen Transformationen in sich vergleiche Hurwitz, Matth. Ann. Bd. 41. pag. 406 ff.

### § 37. Normalformen der Grundgleichung.

Wendet man auf die eine Klasse algebraischer Funktionen definierende Grundgleichung  $F \begin{pmatrix} n \\ s, z \end{pmatrix} = 0$  eine birationale Transformation an, so geht diese Grundgleichung über in eine neue Gleichung  $\psi \begin{pmatrix} \nu \\ S, Z \end{pmatrix} = 0$ , die wie wir früher gesehen haben, wieder als definierende Gleichung derselben Funktionenklasse angesehen werden kann. Durch geeignete Wahl der birationalen Transformation läßt sich nun erreichen, daß die neue Gleichung  $\psi = 0$  eine möglichst einfache Gestalt annimmt, z. B. von möglichst niedrigem Grade in der neuen Veränderlichen ist. Derartige, möglichst einfache Formen der Grundgleichung nennen wir Normalformen derselben.\*)

Die Zurückführung der Grundgleichung  $F = 0$  auf eine Normalform beruht auf dem

\*) Der Begriff der „Normalform“ ist ein sehr dehnbarer und hängt davon ab, was man unter einer möglichst einfachen Grundgleichung versteht. Daher die verschiedenen „Normalformen“ für dasselbe  $p$ .



**Satz 1°)** Der Quotient  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$  zweier  $\varphi$ -Funktionen geht durch birationale Transformation wieder in einen Quotienten  $\frac{\psi_1}{\psi_2}$  zweier  $\varphi$ -Funktionen über.

Beweis: Durch birationale Transformation geht jedes

Integral I. Gattung  $\int \frac{\varphi(s, z)}{F'(s, z)} dz$  wieder in ein Integral

I. Gattung  $\int \frac{\psi(S, Z)}{\Psi'(S, Z)} . dZ$  über (siehe Riemann, Ges. W. pag. 111 und Appell et Goursat pag. 267). Es bestehen also die Beziehungen:

$$\frac{\varphi_1(s, z) . dz}{F'(s, z)} = \frac{\psi_1(S, Z) . dZ}{\Psi'(S, Z)}, \quad \frac{\varphi_2(s, z) . dz}{F'(s, z)} = \frac{\psi_2(S, Z) . dZ}{\Psi'(S, Z)},$$

und aus diesen ergibt sich durch Division:

$$1^\circ) \quad \frac{\varphi_1(s, z)}{\varphi_2(s, z)} = \frac{\psi_1(S, Z)}{\psi_2(S, Z)}, \text{ w. z. b. w.}$$

Der eben bewiesene Satz ermöglicht es, jeder algebraischen Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  vom Geschlechte  $p \geq 3$  eine invariante Form zu erteilen, d. h. eine Form, die bei jeder weiteren birationalen Transformation unverändert bleibt. Ist nämlich  $p \geq 3$ , so sind die zwei  $\varphi$ -Quotienten

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

wenn  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  linear unabhängig sind und zwischen ihnen keine identische Beziehung besteht (was nur im sogenannten hyperelliptischen Falle möglich ist), gegeneinander irreduzible Funktionen der Klasse von der Ordnung  $2p - 2$ . Das Gleichungssystem

$$2^\circ) \quad S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

definiert dann eine birationale Transformation, welche die Grundgleichung  $F(s, z) = 0$  in eine Gleichung von der Form

$$3^0) \quad \psi(S^{2p-2}, Z^{2p-2}) = 0^*)$$

überführt. Die Anzahl  $r$  der Doppelpunkte dieser Gleichung läßt sich leicht bestimmen. Nach Satz IV<sup>0</sup>) § 5 ist nämlich die Diskriminante  $D$  von 3<sup>0</sup>) bis auf einen von  $S_1 \dots S_{2p-2}$  unabhängigen Faktor identisch mit dem Produkte:

$$\Pi = \psi'(S_1) \cdot \psi'(S_2) \dots \psi'(S_{2p-2}),$$

wo  $S_1 \dots S_{2p-2}$  die einem unbestimmten  $Z$  entsprechenden Wurzeln  $S$  von 3<sup>0</sup>) bedeuten. Die Anzahl der einfachen Wurzelkoinzidenzen von  $\psi = 0$  ist daher gleich der Ordnung, zu welcher das Produkt  $\Pi$  für  $Z = \infty$  unendlich wird. Nun wird aber für  $Z = \infty$ , d. h. für  $\varphi_3 = 0$ , auch  $S = \infty$ , und daher, da  $\psi'(S)$  in  $S$  vom Grade  $2p - 3$  ist, jeder Faktor von  $\Pi$  gleich  $\infty^{2p-3}$ . Die Anzahl der Wurzelkoinzidenzen von 3<sup>0</sup>) ist folglich gleich  $(2p - 2)(2p - 3)$ .

Bezeichnen nun, wie früher,  $v$  die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte,  $r$  die der Doppelpunkte von 3<sup>0</sup>), so bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} (2p - 2)(2p - 3) &= v + 2r, \\ v &= 2(2p - 2 + p - 1), \end{aligned}$$

aus denen sich unmittelbar

$$4^0) \quad r = 2(p - 1)(p - 3)$$

ergiebt.

Führt man nun noch an Stelle von  $S$  und  $Z$  mit Hilfe der Gleichungen:

$$S = \frac{x}{z}, \quad Z = \frac{y}{z},$$

die neuen Variablen  $x, y, z$  ein, so geht 3<sup>0</sup>) nach Multiplikation mit  $z^{2p-2}$  in die homogene Gleichung

$$5^0) \quad \psi\left(\frac{2p-2}{x, y, z}\right) = 0$$

mit den drei Variablen  $x, y, z$  über.\*\*)

\*) Riemann, Ges. W. pag. 458.

\*\*) Riemann, Ges. W. pag. 459.

Nimmt man die im Vorigen benutzten Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  nicht mehr beliebig, sondern in geeigneter Weise an, so läßt sich der Grad der transformierten Gleichung  $\psi = 0$  noch weiter erniedrigen. Nimmt man nämlich in  $T$   $p - 3$  wesentliche, nicht von einander abhängige Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-3}$  an, und schreibt man dem allgemeinen Integranden I. Gattung diese Punkte als Nullpunkte erster Ordnung vor, so giebt es noch

$$\lambda + 1 = p - 1 - (p - 3) + 1 = 3$$

linear unabhängige Integranden I. Gattung, also auch drei linear unabhängige  $\varphi$ -Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , die in diesen  $p - 3$  Punkten verschwinden. Bildet man mit Hilfe dieser  $\varphi$ -Funktionen die birationale Transformation:

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

so sind  $S$  und  $Z$  Funktionen der Klasse (I. Gattung) von der gemeinsamen Ordnung:

$$2p - 2 - (p - 3) = p + 1.$$

Dies giebt den

**Satz II<sup>o</sup>**) Die Gleichung  $F(s, z) = 0$  vom Geschlecht  $p$  geht durch die birationale Transformation

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

worin  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  linear unabhängige  $\varphi$ -Funktionen bezeichnen, die  $p - 3$  beliebig in  $T$  angenommene Punkte zu gemeinschaftlichen Nullpunkten besitzen, über in eine Gleichung von der Form

$$6^o) \quad \psi\left(S^{\overbrace{p+1}^{p+1}}, Z^{\overbrace{p+1}^{p+1}}\right) = 0.*$$

Die Anzahl  $r$  der Doppelpunkte dieser Gleichung er giebt sich aus den Beziehungen:

$$\begin{aligned} p(p+1) &= v + 2r, \\ v &= 2(p+1 + p-1). \end{aligned}$$

---

\*) Clebsch u. Gordan, Theorie d. Abel'schen Funktionen, pag. 65.

Es ist:

$$7^{\circ}) \quad r = \frac{1}{2} p (p - 3).$$

Die Herren Brill und Nöther haben gezeigt, daß die im Vorigen abgeleitete Normalgleichung 6<sup>o</sup>) von Clebsch und Gordan nicht die Normalgleichung von möglichst niedrigem Grade ist, die sich für  $p \geq 3$  erreichen läßt. Für die Normalgleichung niedrigsten Grades vergleiche Brill und Nöther; Math. Annalen Bd. VIII oder die Darstellung von A. Picard: *Traité d'analyse*. T. II, pag. 451 ff.

Die Zurückführung der Gleichung  $F \binom{n}{s, z} = 0$  des Geschlechts  $p$  auf eine Gleichung vom Grade  $p + 1$  beruht wesentlich darauf, daß die Transformation

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad S = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

im allgemeinen birational ist. Es giebt jedoch einen Ausnahmefall. Bevor wir diesen besprechen, wollen wir noch mit Hilfe der transformierten Gleichung 6<sup>o</sup>), die bereits früher gefundene Zahl  $3p - 3$  der Moduln der Klasse einer allgemeinen Gleichung des Geschlechtes  $p$  bestätigen.

Die Normalgleichung 6<sup>o</sup>) hängt von

$$\frac{1}{2} (p + 1) (p + 4)$$

Parametern ab und besitzt, wie oben bewiesen  $\frac{1}{2} p (p - 3)$  Doppelpunkte, in deren jedem

$$\psi'(S, Z) = 0$$

ist. Dies liefert  $\frac{1}{2} p (p - 3)$  Bedingungsgleichungen zwischen den Parametern von  $\psi$ . Die Anzahl der willkürlichen Koeffizienten beträgt also noch

$$\frac{1}{2} [(p + 1) (p + 4) - p (p - 3)] = 4p + 2.$$

Andererseits hängt die birationale Transformation, durch welche  $F = 0$  in  $\psi = 0$  umgeformt wird, von  $p - 3$  von einander unabhängigen willkürlichen Punkten ab; diese

$p - 3$  Punkte kann man sich so angenommen denken, daß von vornherein  $p - 3$  Koeffizienten von  $\mathcal{P}$  gegebene Werte annehmen. Wendet man dann noch auf 6°) die allgemeinste homographische Transformation

$$s = \frac{\alpha Z + \beta S + \gamma}{\alpha_3 Z + \beta_3 S + \gamma_3}, \quad z = \frac{\alpha_1 Z + \beta_1 S + \gamma_1}{\alpha_2 Z + \beta_2 S + \gamma_2},$$

die von 8 willkürlichen Parametern abhängt, so lassen sich weitere 8 Koeffizienten von  $\mathcal{P} = 0$  so bestimmen, daß sie gegebene Werte annehmen. Die Anzahl der in 6°) willkürlich bleibenden Parameter ist daher schließlic:

$$4p + 2 - (p - 3) - 8 = 3p - 3, \quad \text{w. z. b. w.}$$

In enger Beziehung mit der in diesem Paragraphen entwickelten Theorie steht eine Frage, die wir noch in kurzen Worten besprechen wollen.\*)

Es seien

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$$

$p$  linear unabhängige Funktionen, d. h. die Zähler von  $p$  linear unabhängigen Integranden I. Gattung. Bildet man aus denselben ganze homogene Funktionen zweiten Grades:

$$8^\circ) \quad F_0(\varphi_1 \dots \varphi_p), F_1(\varphi_1 \dots \varphi_p), F_2(\varphi_1 \dots \varphi_p), \dots$$

so sind die Quotienten

$$9^\circ) \quad \frac{F_1}{F_0}, \frac{F_2}{F_0}, \dots$$

Funktionen der Klasse, die in denselben  $q = 4p - 4$  Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_q \dots \gamma_{4p-4}$  der Fläche  $T$  zur ersten Ordnung unendlich werden, und daher Funktionen II. Gattung sind. Bedeutet nun  $x$  den Überschuss des Punktsystems  $\gamma_1 \dots \gamma_{4p-4}$ , so ist

$$q - x = p,$$

d. h.

$$x = 3p - 4.$$

Nach dem Riemann-Roch'schen Satze enthält daher die allgemeinste Funktion der Klasse, welche die Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_{4p-4}$  zu Unstetigkeitspunkten besitzt, noch genau

$$x + 1 = 3p - 3$$

\*) H. Weber, Math. Ann. Bd. XIII.

verfügbare Konstanten, von denen eine additiv ist. Jeder der Quotienten 9<sup>o</sup>) läßt sich somit durch  $3p - 4$  derselben linear ausdrücken, oder: zwischen je  $3p - 2$  der Funktionen 8) besteht eine lineare und homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten. Nimmt man speziell für  $F_0, F_1, F_2$  die  $\frac{1}{2} p(p+1)$  Funktionen:

$$10^o) \quad \varphi_1^2, \varphi_1 \cdot \varphi_2, \dots, \varphi_{p-1} \varphi_p, \varphi_p^2,$$

so erhält man den

**Satz III<sup>o</sup>)** Zwischen  $p$  linear unabhängigen  $\varphi$ -Funktionen  $\varphi_1 \dots \varphi_p$  bestehen stets

$$\frac{1}{2} p(p+1) - (3p-3) = \frac{1}{2} (p-2)(p-3)$$

homogene Gleichungen zweiten Grades.

In besonderen Fällen kann es mehr solcher Gleichungen geben; der vorige Satz, der übrigens nur ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes ist (siehe etwa H. Stahl, Theorie der Abel'schen Funktionen pag. 183), giebt daher nur eine untere Grenze.

Beispiel: Es sei  $p = 3$ . Für diesen Fall ist

$$\frac{1}{2} (p-2)(p-3) = 0,$$

was sich auch folgenderweise bestätigen läßt. — Bestünde zwischen den drei linear unabhängigen Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  eine homogene Gleichung zweiten Grades, so könnte man dieselbe auf die Form

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_3^2,$$

oder 
$$\frac{\varphi_2}{\varphi_3} = \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_3} \right)^2$$

bringen. Da aber  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$  höchstens in je vier Punkten  $= 0^1$

und  $\infty^1$  werden kann, so könnte  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$  nur in je zwei Punkten  $0^1$  und  $\infty^1$  werden. Es wird also eine Funktion der Klasse von der Ordnung 2 existieren, was, wie wir sehen werden,

den hyperelliptischen Fall charakterisiert und bei unbeschränktem Moduln der Klasse unmöglich ist.

Dagegen läßt sich im allgemeinen Falle  $p=3$  eine homogene Gleichung vierten Grades zwischen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  nachweisen. Bezeichnet man nämlich (siehe H. Weber, Theorie der Abel'schen Funktionen vom Geschlechte  $p=3$ , pag. 51) mit  $q, r, s, t$ ;  $q_1, r_1, s_1, t_1$  irgend vier der drei Zahlen 1, 2, 3, so ist der Quotient:

$$Z = \frac{\varphi_q \cdot \varphi_r \cdot \varphi_s \cdot \varphi_t}{\varphi_{q_1} \cdot \varphi_{r_1} \cdot \varphi_{s_1} \cdot \varphi_{t_1}}$$

eine Funktion der Klasse von der Ordnung 16, die nach dem Riemann-Roch'schen Satz als lineare Funktion von 13 speziellen Funktionen derselben Art mit gleichen Unstetigkeitsstellen wie  $Z$  dargestellt werden kann. Behält man den Nenner  $\varphi_{q_1} \cdot \varphi_{r_1} \cdot \varphi_{s_1} \cdot \varphi_{t_1}$  bei, so lassen sich aber 14 solcher Funktionen  $Z$  herstellen, so daß zwischen denselben eine lineare Relation bestehen muß, die nach Weghebung des gemeinsamen Nenners in eine homogene Gleichung vierten Grades zwischen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  übergeht. — Diese Gleichung kann ebenso gut, wie die Grundgleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$ , als definierende Gleichung der Klasse angesehen werden; dividiert man sie nämlich durch  $\varphi_1^4$ , so geht sie in die Gleichung 3<sup>o</sup>) dieses Paragraphen über, welche durch die birationale Transformation

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

aus der Grundgleichung  $F=0$  hervorgeht.

Im allgemeinen Falle  $p=4$  giebt es zwischen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  eine homogene Gleichung zweiten Grades und eine solche dritten Grades. Beide zusammen sind äquivalent mit der Gleichung 3<sup>o</sup>) dieses Paragraphen, vom Grade 6, die durch die birationale Transformation

$$S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}$$

aus der Grundgleichung  $F=0$  hervorgeht, und bestimmen also vollständig eine Klasse algebraischer Funktionen vom Geschlechte  $p=4$ .

Im Falle  $p = 5$  giebt es drei homogene Gleichungen zweiten Grades zwischen den fünf linear unabhängigen  $\varphi$ -Funktionen, und diese Gleichungen sind umgekehrt im allgemeinen ausreichend zur Definition der Funktionenklasse vom Geschlechte  $p = 5$ . Für den Beweis siehe die schon erwähnte Abhandlung von Herrn H. Weber, wo auch auf den Umstand hingewiesen wird, daß durch die Darstellung der algebraischen Funktionen durch die Gesamtheit der Beziehungen zwischen den  $\varphi$ -Funktionen die Frage nach den Moduln der Klasse einer Behandlung mit den Hilfsmitteln der gewöhnlichen Invariantentheorie zugänglich wird.

### § 38. Der hyperelliptische Fall.

Im vorigen Paragraphen ist gesagt worden, daß die Transformation

$$1^{\circ) \quad S = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Z = \frac{\varphi_2}{\varphi_3},$$

worin  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  spezielle  $\varphi$ -Funktionen bedeuten, die außer den Doppelpunkten von  $T$  noch weitere  $p - 3$  wesentliche, gemeinsame Nullpunkte besitzen, nicht immer birational ist. Wir wollen diese Möglichkeit näher untersuchen.

Soll die Transformation  $1^{\circ)}$  nicht birational sein, so müssen jedem Punkte  $(S, Z)$  der zur transformierten Gleichung gehörigen Fläche  $T_1$  mindestens zwei Punkte  $(s, z)$  der zur ursprünglichen Gleichung  $F = 0$  gehörigen Fläche  $T$  entsprechen. Mit andern Worten: für jedes konstante Wertepaar  $S, Z$  muß es, wenn  $\sigma_1, \zeta_1$  ein Wertepaar  $(s, z)$  bezeichnet, das die Gleichungen

$$\begin{aligned} S \cdot \varphi_2(\sigma_1, \zeta_1) - \varphi_1(\sigma_1, \zeta_1) &= 0, \\ Z \cdot \varphi_3(\sigma_1, \zeta_1) - \varphi_2(\sigma_1, \zeta_1) &= 0 \end{aligned}$$

befriedigt, mindestens ein zweites Wertepaar  $\sigma_2, \zeta_2$  von  $s, z$  geben, für das diese Gleichungen ebenfalls erfüllt sind, oder auch: Wenn wir den 2  $\varphi$ -Funktionen

$$2^{\circ) \quad \begin{cases} S \cdot \varphi_3 - \varphi_1, \\ Z \cdot \varphi_3 - \varphi_2 \end{cases}$$



aufser den Doppelpunkten und den schon vorhandenen  $p-3$  gemeinsamen Nullpunkten noch einen weiteren gemeinsamen Nullpunkt in  $T$  vorschreiben, so müssen sie sofort noch mindestens einen fernerer Nullpunkt gemein haben.

Die drei  $\varphi$ -Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sind, da die  $p-3$  denselben zuerst vorgeschriebenen Nullpunkte von einander unabhängig sind, linear unabhängig. Ein weiterer Nullpunkt von

$$S \cdot \varphi_3 - \varphi_1,$$

wo  $S$  eine beliebige Konstante ist, muß also gemeinsamer Nullpunkt von  $\varphi_1$  und  $\varphi_3$  sein, und wenn dieser Punkt auch ein Nullpunkt von

$$Z \cdot \varphi_3 - \varphi_2$$

sein soll, auch ein gemeinsamer Nullpunkt von  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$ , d. h. schreibt man den 2  $\varphi$ -Funktionen 2<sup>o</sup>) aufser den Doppelpunkten und den  $p-3$  gemeinsamen Nullpunkten  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-3}$  noch einen weiteren gemeinsamen Nullpunkt  $\gamma_{p-2}$  vor, so muß derselbe ein gemeinsamer Nullpunkt von  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sein. Die Transformation 1<sup>o</sup>) ist daher dann und nur dann nicht birational, wenn ein beliebiger, gemeinsamer Nullpunkt von  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sogleich mindestens einen weiteren gemeinsamen Nullpunkt derselben Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  nach sich zieht.

Wir können dies auch wie folgt ausdrücken: Die Transformation 1<sup>o</sup>) ist dann und nur dann nicht birational, wenn die  $p-3$  Gleichungen

$$w'(\gamma_1) = 0, \dots w'(\gamma_{p-3}) = 0,$$

welche ausdrücken, daß der allgemeine Integrand I. Gattung  $w'$  in den  $p-3$  von einander unabhängigen Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-3}$  verschwindet, zusammen mit einer anderen Gleichung:

$$w'(\gamma_{p-2}) = 0,$$

wo  $\gamma_{p-2}$  einen beliebigen weiteren Punkt von  $T$  bezeichnet, sogleich mindestens eine weitere Gleichung:

$$w'(\gamma) = 0$$

nach sich ziehen.

Wir nehmen nun zunächst an, das Verschwinden des allgemeinen Integranden I. Gattung  $w'$  in  $p-2$  von ein-

ander unabhängigen Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-2}$  ziehe das Verschwinden von  $w'$  in nur einem weiteren Punkte  $\gamma$  nach sich. In diesem Falle müssen die Koordinaten  $\alpha, \beta$  von  $\gamma$  von den Koordinaten  $\alpha_i, \beta_i$  aller Punkte  $\gamma_i$  ( $i = 1 \dots p-2$ ) abhängen. Denn hingen sie von den Koordinaten von nur  $\mu$  ( $< p-2$ ) Punkten ab, so würde der Integrand  $w'$ , der in  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-2}$  verschwindet, gegen die Voraussetzung in mehr als einem weiteren Punkte, nämlich in

$$(p-2)_\mu = \frac{(p-2)(p-3)\dots(p-\mu-1)}{1 \dots \mu}$$

weiteren Punkten verschwinden. Es ist daher:

$$3^0) \quad \begin{cases} \alpha = R_1(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{p-2}, \beta_{p-2}), \\ \beta = R_2(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{p-2}, \beta_{p-2}), \end{cases}$$

wo  $R_1, R_2$  rationale Funktionen der Koordinaten  $\alpha_i, \beta_i$  bezeichnen. — Ebenso müssen umgekehrt die Beziehungen:

$$4^0) \quad \begin{cases} \alpha_1 = P_1(\alpha\beta, \alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_{p-2}\beta_{p-2}), \\ \beta_1 = P_2(\alpha\beta, \alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_{p-2}\beta_{p-2}) \end{cases}$$

bestehen, wo  $P_1, P_2$  wieder rationale Funktionen der im Argumente auftretenden Koordinaten bedeuten. — Sieht man  $\alpha_2\beta_2, \dots, \alpha_{p-2}\beta_{p-2}$  als willkürliche Parameter an, so giebt es, wie die Beziehungen 3<sup>0</sup>) und 4<sup>0</sup>) zeigen, eine birationale Transformation mit willkürlichen Parametern zwischen

$$\alpha, \beta \text{ und } \alpha_1, \beta_1,$$

dies ist aber für  $p > 1$  unmöglich. — Die Annahme, daß das Verschwinden von  $w'$  in  $p-2$  beliebigen Punkten das Verschwinden desselben Integranden in nur einem weiteren Punkte nach sich ziehe, führt also auf einen Widerspruch mit Früherem.

Angenommen nun, das Erfülltsein der  $p-2$  wesentlichen Gleichungen

$$w'(\gamma_1) = 0, \dots w'(\gamma_{p-2}) = 0$$

ziehe das Erfülltsein von weiteren  $\kappa$  ( $> 1$ ) Gleichungen:

$$w'(\gamma'_1) = 0, \dots w'(\gamma'_\kappa) = 0$$

nach sich.

## Das Punktsystem

$$5^{\circ}) \quad \gamma_1 \dots \gamma_{p-2}, \gamma'_1 \dots \gamma'_x$$

ist dann ein Punktsystem I. Gattung mit dem Überschufs  $\kappa$ , und es gilt daher für dasselbe die Beziehung:

$$q - \kappa = p - \lambda - 1,$$

wo 
$$q - \kappa = p - 2,$$

und daher 
$$\lambda = 1$$
 ist.

Das zum Punktsystem  $5^{\circ})$  komplementäre Punktsystem ist also ebenfalls ein Punktsystem I. Gattung und sein Überschufs  $\kappa'$  ist  $= 1$ . Die Ordnung  $q' = 2p - 2 - q$  dieses Systems ist folglich mindestens  $= 2$ , d. h. der Überschufs  $\kappa$  des Systems  $5^{\circ})$  ist höchstens  $= p - 2$ . Es wird sich gleich ergeben, daß  $\kappa$  thatsächlich gleich  $p - 2$  ist.

Die  $\kappa$  Punkte  $\gamma'_1 \dots \gamma'_x$  können in ihrer Lage nicht alle zugleich von der Lage aller Punkte  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-2}$  abhängen. Denken wir uns nämlich zu den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-2}$  noch einen weiteren Punkt  $\gamma_{p-1}$  hinzugenommen, so daß die Gleichungen

$$6^{\circ}) \quad w'(\gamma_1) = 0, \dots w'(\gamma_{p-2}) = 0, w(\gamma_{p-1}) = 0$$

alle von einander unabhängig sind, so ist dadurch  $w'$  vollkommen bestimmt bis auf einen konstanten Faktor. Die übrigen Nullpunkte von  $w'$ ,  $p - 1$  an der Zahl, sind also auch bestimmt. Je  $p - 2$  der Gleichungen  $6^{\circ})$  ziehen aber, nach unserer Annahme, das Verschwinden von  $w'$  in  $\kappa$  weiteren Punkten nach sich. Die Gleichungen  $6^{\circ})$  in ihrer Gesamtheit ziehen also  $\kappa(p - 1)$  weitere Nullpunkte von  $w'$  nach sich, und diese Nullpunkte müssen alle von einander verschieden sein, wenn je  $\kappa$  einer Gruppe von  $p - 2$  Gleichungen  $6^{\circ})$  entsprechende Nullpunkte sämtlich von allen diesen  $p - 2$  Gleichungen abhängen. Der Integrand  $w'$  hätte dann im Endlichen

$$p - 1 + \kappa(p - 1)$$

von einander verschiedene Nullpunkte, was unmöglich ist, da  $\kappa > 1$ .

Die  $\kappa$  Punkte  $\gamma'_1 \dots \gamma'_x$  zerfallen daher in Gruppen von  $\nu$  Punkten, die von der Lage von nur  $\mu (< p - 2)$  Punkten

aus der Reihe  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-2}$  abhängen, d. h. der allgemeine Integrand  $w'$ , der in  $\mu (< p-2)$  von den Punkten  $\gamma_1 \dots \gamma_{p-2}$  verschwindet, muß noch in weiteren  $\nu$  Punkten  $\gamma'$  verschwinden, die alle von den sämtlichen ersten  $\mu$  Punkten abhängen. Durch Betrachtungen, die den eben angestellten ganz analog sind, ergibt sich nun, daß der Integrand  $w'$  im Endlichen im ganzen

$$p-1 + \nu \cdot \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-\mu)}{1 \cdot 2 \dots \mu}$$

von einander verschiedene Nullpunkte haben mußte. Diese Anzahl muß aber andererseits  $= 2p-2$  sein; es muß daher die Gleichheit

$$7^\circ) \quad p-1 + \nu \cdot \frac{(p-1)\dots(p-\mu)}{1 \cdot 2 \dots \mu} = 2p-2$$

bestehen, und dies ist nur möglich, wenn

$$8^\circ) \quad \mu = \nu = 1^*)$$

ist. Wir haben so den

**Satz I<sup>0</sup>)** Die Transformation 1<sup>0</sup>) ist dann und nur dann nicht birational, wenn das Verschwinden des allgemeinen Integranden I. Gattung  $w'$  in einem beliebigen Punkte  $\gamma$  von  $T$  das Verschwinden von  $w'$  in einem weiteren Punkte  $\gamma'$  von  $T$  nach sich zieht.

Wenn der allgemeine Integrand I. Gattung  $w'$ , der zu einer Grundgleichung  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  gehört, die im vorigen Satze ausgesprochene, ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, dann sagt man:  $F\left(\begin{smallmatrix} n & m \\ s, z \end{smallmatrix}\right) = 0$  definiert eine Klasse hyperelliptischer Funktionen, sie gehört dem hyperelliptischen Falle an.

Im hyperelliptischen Fall ist also die Zurückführung der Grundgleichung  $F=0$  auf die Clebsch-Gordan'sche Normalgleichung vom Grade  $p+1$  unmöglich.

---

\*) Picard, Traité d'Analyse, T. III, pag. 445 ff.

Die im Vorigen gegebene Definition des hyperelliptischen Falls, die auch noch für  $p=2$  gilt, läßt sich noch in andere Form bringen. Es sei  $\alpha_1$  ein Punkt von  $T$ , in dem der allgemeine Integrand  $w'$  verschwindet,  $\alpha_2$  der Punkt, in dem  $w'$  infolgedessen von selbst verschwindet. Das Gleichungssystem

$$9^\circ) \quad w'(\alpha_1) = 0, \quad w'(\alpha_2) = 0$$

enthält dann eine überzählige Gleichung, und das Punktsystem  $\alpha_1, \alpha_2$  ist daher (siehe Satz III<sup>o</sup>), § 29) ein Punktsystem der Klasse. Es giebt somit eine Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q=2$ , den Unstetigkeitspunkten  $\alpha_1, \alpha_2$  und dem Überschufs  $\kappa=1$ . Beschränken wir uns weiter auf den Fall  $p \geq 2$ , und das sei von hier an stets vorausgesetzt, so folgt aus  $q - \kappa = 1$ :

$$10^\circ) \quad q - \kappa \leq p - 1;$$

das Punktsystem  $\alpha_1, \alpha_2$  ist daher ein Punktsystem I. Gattung, und die in  $\alpha_1, \alpha_2$  unendlich werdende Funktion  $\tau$  der Klasse eine Funktion I. Gattung, die sich darstellen läßt in der Form:

$$11^\circ) \quad \tau = \frac{w'_1}{w'_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

Berücksichtigt man außerdem, daß für diese Funktion

$$q - \kappa = 1 = p - \lambda - 1$$

ist, so ergibt sich für den Defekt  $\lambda$  von  $\tau$  der Wert:

$$12^\circ) \quad \lambda = p - 2.$$

Es gilt daher der

**Satz II<sup>o</sup>)** Im hyperelliptischen Falle existiert, für  $p \geq 2$ , stets eine Funktion  $\tau$  I. Gattung der Klasse von der Ordnung  $q=2$ , und der allgemeine Integrand I. Gattung (die allg.  $\varphi$ -Funktion), der in den Unstetigkeitspunkten  $\alpha_1, \alpha_2$  dieser Funktion  $= o^1$  wird, reduziert sich auf eine lineare Funktion von  $p-1$  linear unabhängigen Integranden I. Gattung ( $p-1$   $\varphi$ -Funktionen), die alle in den Punkten  $\alpha_1, \alpha_2$  verschwinden.

Dieser Satz läßt sich umkehren:

**Satz III<sup>o</sup>)** Giebt es für  $p \geq 2$  eine Funktion  $\tau$  I. Gattung der Klasse von der Ordnung  $q=2$ , so bestimmt jeder Punkt  $\alpha_1$  der Riemann'schen Fläche  $T$  einen weiteren Punkt  $\alpha_2$  derselben. Diese Bestimmung ist dadurch festgelegt, daß das Verschwinden des allgemeinen Integranden  $w'$  in  $\alpha_1$  das Verschwinden desselben Integranden in  $\alpha_2$  nach sich zieht, oder, mit anderen Worten, daß jede ganze lineare Funktion von  $p-1$  linear unabhängigen Integranden I. Gattung, die in  $\alpha_1$  verschwindet, auch in  $\alpha_2$  gleich Null wird.

Beweis: Ist, für  $p \geq 2$ ,  $\tau$  eine Funktion der Klasse mit den Unstetigkeitspunkten  $\beta_1, \beta_2$ , so ist  $\tau$  eine Funktion I. Gattung. Bedeutet ferner  $\tau(\alpha_1)$  den Wert von  $\tau$  in einem beliebigen Punkte  $\alpha_1$  von  $T$ , so ist

$$\sigma = \frac{\tau - C}{\tau - \tau(\alpha_1)},$$

wo  $C$  eine von  $\tau(\alpha_1)$  verschiedene Konstante bedeutet, ebenfalls eine Funktion I. Gattung der Klasse von der Ordnung  $q=2$ . Diese Funktion wird unstetig in  $\alpha_1$  und in einem weiteren Punkte  $\alpha_2$ , der dadurch bestimmt ist, daß die Gleichung  $w'(\alpha_1)=0$  die Gleichung  $w'(\alpha_2)=0$  nach sich zieht. — Berücksichtigt man außerdem, daß der Defekt  $\lambda$  des Punktsystems  $\alpha_1, \alpha_2$  gleich  $p-2$  ist, so läßt sich auch sagen, daß der Punkt  $\alpha_2$  dadurch bestimmt ist, daß jedes Aggregat:

$$c_1 w'_1 + c_2 w'_2 + \dots + c_{p-1} w'_{p-1},$$

oder 
$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_{p-1} \varphi_{p-1},$$

das in  $\alpha_1$  verschwindet, auch in  $\alpha_2$  gleich Null wird, w. z. b. w.

Aus Satz II<sup>o</sup>) und III<sup>o</sup>) folgt:

Für  $p \geq 2$  läßt sich der hyperelliptische Fall entweder definieren durch die Existenz einer Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q=2$ , oder dadurch, daß das Nullwerden des

allgemeinen Integranden I. Gattung  $w'$  in einem beliebigen Punkte  $\alpha_1$  von  $T$  das Verschwinden von  $w'$  in einem weiteren Punkte  $\alpha_2$  von  $T$  nach sich zieht.

Im folgenden Paragraphen soll gezeigt werden, wie sich aus der Existenz einer Funktion  $\tau$  der Klasse von der Ordnung  $q=2$  eine für die Anwendung besonders bequeme Form der definierenden Grundgleichung einer Klasse hyperelliptischer Funktionen des Geschlechtes  $p \geq 2$  ableiten läßt.

### § 39. Normalform der Grundgleichung im hyperelliptischen Falle.

Es sei

$$1^o) \quad \psi \left( \begin{smallmatrix} n-1 & m-1 \\ s & z \end{smallmatrix} \right)$$

eine ganze rationale Funktion von den angeschriebenen Graden  $n-1$ ,  $m-1$  in den durch die hyperelliptische Grundgleichung  $F \left( \begin{smallmatrix} n & m \\ s & z \end{smallmatrix} \right) = 0$  vom Geschlechte  $p$  verbundenen Variablen  $s$  und  $z$ . Diese Funktion  $\psi$ , in der  $mn$  verfügbare, konstante Koeffizienten vorkommen, enthält, wenn man ihr die  $2r$  Doppelpunkte von  $T$  als Nullpunkte aufprägt, noch

$$mn - r = (m-1)(n-1) - r + m + n - 1 = p + m + n - 1$$

verfügbare Konstanten und besitzt außer den  $2r$  Doppelpunkten noch

$$\begin{aligned} m(n-1) + n(m-1) - 2r &= 2(m-1)(n-1) - 2r + m + n - 2 \\ &= 2p - 2 + m + n \end{aligned}$$

weitere Nullpunkte. Schreibt man  $\varphi$ , außer den Doppelpunkten, noch

$$p + m + n - 3$$

beliebige andere Nullpunkte vor, so besitzt diese Funktion noch  $p+1$  Nullpunkte, während die Anzahl der in ihr noch enthaltenen verfügbaren Konstanten

$$p + m + n - 1 - (p + m + n - 3) = 2$$

beträgt. Die Funktion  $\psi$  mit diesen  $2r + p + m + n - 3$  Nullpunkten läßt sich also darstellen in der Form:

$$2^{\circ}) \quad \psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2,$$

wo  $\psi_1, \psi_2$  zwei spezielle ganze, rationale Funktionen von  $s$  und  $z$  bezeichnen, die in  $s$  und  $z$  von den Graden  $n - 1$  und  $m - 1$  sind, und außer den Doppelpunkten noch weitere  $p + m + n - 3$  gemeinsame Nullpunkte haben.

Der Quotient

$$3^{\circ}) \quad S = \frac{\psi_1}{\psi_2}$$

ist dann eine Funktion der Klasse von der Ordnung  $p + 1$ . Nimmt man hierzu noch die nach Voraussetzung existierende Funktion der Klasse von der Ordnung 2, die sich als Funktion I. Gattung in der Form:

$$4^{\circ}) \quad Z = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

darstellen läßt, so besteht zwischen  $S$  und  $Z$  eine algebraische Gleichung

$$\Phi \left( S, Z^{\frac{p+1}{2}} \right) = 0,$$

oder

$$5^{\circ}) \quad S^2 \cdot K + S \cdot L + M = 0,$$

wo  $K, L, M$  ganze Funktionen von  $Z$  vom Grade  $p + 1$  sind. Denken wir uns ferner die Funktion  $\psi_1$  so bestimmt, daß  $\psi_1$  in dem einen der zwei Nullpunkte von  $Z$  gleich 0<sup>1</sup> wird, in dem andern aber nicht, so entsprechen dem Werte  $Z = 0$  zwei verschiedene Werte von  $S$ , und die Gleichung 5<sup>o</sup>) ist dann irreducibel (Satz II<sup>o</sup>), § 13). Setzt man nun noch

$$\sigma = 2 S K + L,$$

so geht 5<sup>o</sup>) über in

$$\sigma^2 = L^2 - 4 K \cdot M.$$

Schreibt man hierin für  $\sigma$  und  $Z$  wieder  $s$  und  $z$ , und bezeichnet man die  $2p + 2$  Nullpunkte der Gleichung:

$$L^2 - 4 K \cdot M = 0$$

mit

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2p+1},$$



so nimmt 5°) die Form an:

$$6^{\circ}) \quad s^2 = (z - \alpha)(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{2p-1}).$$

Unsere späteren Betrachtungen über die hyperelliptischen Funktionen (siehe Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen) schliessen sich sämtlich an diese Normalform der Grundgleichung an.

Die durch 6°) definierte algebraische Funktion  $s$  der Klasse besitzt Verzweigungspunkte für  $z = \alpha, \dots, \alpha_{2p+1}$ , und zwar sind diese Verzweigungspunkte alle einfach. Da ferner die durch 6°) definierte Funktionenklasse als vom Geschlechte  $p$  vorausgesetzt war, so müssen die Werte  $z = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}$  alle von einander verschieden sein. Wäre nämlich z. B.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta$ , so hätte man

$$s = (z - \beta) \cdot \sqrt{(z - \alpha)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{2p+1})},$$

und die Funktion  $s$  besäße dann nur noch  $v = 2p$  einfache Verzweigungspunkte, während doch, nach Früherem,

$$v = 2p + 2n - 2$$

sein muß.

Mit Hilfe der Normalform 6°) der Grundgleichung läßt sich die Anzahl der Moduln einer Klasse hyperelliptischer Funktionen vom Geschlechte  $p$  ohne Schwierigkeit bestimmen.

Die Gleichung 6°) enthält  $2p + 2$  Konstanten, nämlich die Größen  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}$ . Wendet man auf 6°) eine lineare Substitution

$$\zeta = \frac{\beta z + \gamma}{z + \delta}$$

an, so läßt sich über die willkürlichen Größen  $\beta, \gamma, \delta$  so verfügen, daß die Gleichung 6°) eine Form annimmt, in der nur mehr  $2p - 1$  willkürliche Konstanten auftreten. Setzt man z. B.:

$$\frac{z - \alpha}{z - \alpha_1} \cdot \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha} = \frac{\zeta}{\zeta - 1},$$

und ferner:

$$\sigma = C \cdot \frac{s}{(z - \alpha_2)^{p+1}},$$

worin

$$C = \frac{(\alpha_2 - \alpha)^p (\alpha_2 - \alpha_1)^p}{V(\alpha - \alpha_1)^{2p+1} (\alpha_2 - \alpha_3) (\alpha_2 - \alpha_4) \dots (\alpha_2 - \alpha_{2p+1})}$$

ist, so geht 6°) über in

$$7^\circ) \quad \sigma^2 = \zeta (\zeta - 1) (\zeta - \beta_2) (\zeta - \beta_3) \dots (\zeta - \beta_{2p+1}),$$

wo allgemein

$$8^\circ) \quad \beta_q = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_q - \alpha)}{(\alpha - \alpha_1) (\alpha_2 - \alpha_q)} \text{ ist, für } q = 3, \dots, 2p + 1.$$

Die der Gleichung 7°) entsprechende Riemann'sche Fläche  $T$  hat drei festliegende Verzweigungspunkte, nämlich in den Punkten  $\zeta = 0, 1, \infty$ . Die übrigen Verzweigungspunkte liegen an Stellen, die durch die verfügbar bleibenden Parameter  $\beta_q$  von 7°) bestimmt sind. Es gilt daher der

**Satz IV°)** Die hyperelliptische Fläche  $T$  vom Geschlechte  $p$  hängt nur von  $2p - 1$  Klassenmoduln ab. Zwischen den  $3p - 3$  Moduln der Klasse, von denen eine allgemeine Fläche  $T$  vom Geschlechte  $p$  abhängt, müssen also im hyperelliptischen Falle  $3p - 3 - (2p - 1) = p - 2$  Beziehungen bestehen.

Im Falle  $p = 2$  ist die Zahl der im Endlichen gelegenen Nullpunkte des allgemeinen Integranden I. Gattung gleich  $2p - 2 = 2$ ; in diesem Falle giebt es also immer eine Funktion der Klasse von der Ordnung 2, d. h. der Fall  $p = 2$  (für den  $3p - 3 = 2p - 1 = 3$  ist) zählt stets zu den hyperelliptischen. Ebenso auch der Fall  $p = 1$ , den wir bisher durchweg ausgeschlossen haben. Dieser letztere Fall ist aber noch insofern von speziellerer Natur, als jede Fläche  $T$  vom Geschlechte  $p = 1$  eine eindeutige Transformation in sich selbst zulässt, die einen willkürlichen Parameter enthält.

Beispiel. \*) Es soll bewiesen werden, dass die der Gleichung

$$s^6 = z(z - \alpha)(z - \beta)^4$$

---

\*) Baker: Abelian Functions, pag. 88, 89.

zugehörige Riemann'sche Fläche vom Geschlechte  $p=2$  ist, daß die Funktion

$$\zeta = \frac{z - \beta}{s}$$

eine Funktion der Klasse von der Ordnung 2 ist, und daß, wenn man

$$\sigma = \frac{[z(\alpha - 2\beta) + \alpha\beta] \cdot (z - \beta)^2}{s^3}$$

setzt, die ursprüngliche Gleichung übergeht in

$$\sigma^2 = \alpha^2 (\zeta^6 - 1) + (\alpha - 2\beta)^2,$$

wo die sechs Verzweigungspunkte leicht bestimmt werden können.

Weitere Beispiele von Flächen vom Geschlechte  $p=2$  liefern die Gleichungen:

$$1^0) \quad s^8 = z(z - \alpha)^3(z - \beta)^4,$$

$$2^0) \quad s^6 = z(z - \alpha)(z - \beta)^3,$$

$$3^0) \quad s^4 = z(z - \alpha)^2(z - \beta)^2(z - \gamma)^3.$$



Im gleichem Verlage erschien:

# Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen

von

**E. Landfriedt.**

(Sammlung Schubert Bd. XLVI.)

Preis: gebunden M. 4.50.

## Inhalt:

### Erster Teil. Die Thetafunktion und ihre Anwendungen.

Kapitel I. Theorie der Riemann'schen Thetafunktion: § 1. Das Jacobi'sche Umkehrproblem. § 2. Die Thetafunktion; Grundeigenschaften derselben. § 3. Thetafunktionen mit Charakteristiken. § 4. Die Riemann'sche  $\vartheta$ -Funktion. § 5. Die Primärreihe und die Sekundärreihen; Lösbarkeit des Umkehrproblems. § 6. Identisches Verschwinden der Summe der Primärreihe. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit des Umkehrproblems. § 7. Über  $\vartheta$ -Funktionen mit zweitheiligen Charakteristiken und Berührungsfunktionen.

Kapitel II. Anwendung der Thetafunktionen: § 8. Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. § 9. Darstellung der Funktionen und Integrale der Klasse durch  $\vartheta$ -Quotienten. § 10. Die Wurzelfunktionen; Definition und Darstellung derselben. § 11. Über Wurzelfunktionen zweiten Grades. § 12. Beziehungen zwischen Wurzelformen.

### Zweiter Teil. Die hyperelliptischen Funktionen.

Kapitel III. Die Funktionen und Integrale der Klasse: § 13. Die einfach zusammenhängende Fläche  $T$  und die Funktionen der Klasse. § 14. Die Integrale I. Gattung. § 15. Die  $p$  Normalintegrale I. Gattung. § 16. Die Normalintegrale II. und III. Gattung.

Kapitel IV. Die Thetafunktion: § 17. Die hyperelliptische  $\vartheta$ -Funktion. § 18.  $\vartheta$ -Funktionen mit zweitheiligen Charakteristiken.

Kapitel V. Anwendungen der  $\vartheta$ -Funktionen: § 19. Lösung des hyperelliptischen Umkehrproblems. § 20. Die Wurzelfunktionen zweiten Grades.

---

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Soeben erschien :

Formeln und Lehrsätze  
der  
**Allgemeinen  
Mechanik**

in systematischer und geschichtlicher  
Entwicklung

von

**Dr. Karl Heun**

Professor an der Techn. Hochschule in Karlsruhe.

Mit 25 Figuren im Text.

==== Gebunden M. 3.50. ====

**G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.**

G. J. Göschen'sche Verlagsbuchhandlung in Leipzig.

# **Mathematische Mussestunden.**

Eine Sammlung

von

**Geduldspielen, Kunststücken und  
Unterhaltungsaufgaben**  
mathematischer Natur.

Von

**Dr. Hermann Schubert,**

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

Große Ausg. in 3 Bdn. à Mk. 4.— gebd. Kleine Ausg. gebd. Mk. 5.—

Wie schon der Titel sagt, handelt es sich hier um kein streng wissenschaftliches Werk, sondern um ein Buch, in dem der Verfasser allerhand Gedanken über Dinge niedergelegt hat, die mit der Mathematik in Berührung stehen und mit denen sich jeder Gebildete oft und gern in seinen Mussestunden beschäftigt. Es sind ungezwungene kritisch-historische Betrachtungen und unterhaltende Plaudereien über alle möglichen Probleme und Kunststücke, die in einer auch dem Laien leicht fasslichen Form vorgeführt, erklärt und ergänzt werden.

## **Zwölf Geduldspiele**

für Nichtmathematiker

zum Zwecke der Unterhaltung historisch u. kritisch beleuchtet.

Von

**Dr. Hermann Schubert,**

Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

Original kartonniert Mk. 2.—

-- Neue Ausgabe. --

In einigen dieser Spiele dürfte jeder Leser alte Bekannte wiedererkennen, die ihm arges Kopferbrechen gemacht haben. Kinderleicht wird indessen die Arbeit, wenn man den Weisungen des Verfassers folgt. Derselbe begnügt sich übrigens nicht mit der Schilderung der Spiele und der Enthüllung ihrer Geheimnisse, sondern erteilt zugleich sehr anziehende kulturgeschichtliche Aufschlüsse.

Der Name des Verfassers bürgt für einen gediegenen Inhalt, und somit dürfen die Bücher nicht nur dem Mathematiker von Fach, sondern jedem, der sich nur einigermaßen für diese Wissenschaft interessiert, ja überhaupt jedem denkenden, gebildeten Laien manche genussreiche Stunde schaffen.

# Elemente der Stereometrie

von

**Prof. Dr. Gustav Holzmüller.**

- I. Band: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren.  
Preis broschiert Mk. 6.—, gebunden M. 6.60.
- II. Band: **Die Berechnung einfach gestalteter Körper.** Mit  
156 Figuren. Preis broschiert Mk. 10.—, gebunden  
Mk. 10.80.
- III. Band: **Die Untersuchung und Konstruktion schwierigerer  
Raumbilde.** Mit 126 Figuren. Preis broschiert  
Mk. 9.—, gebunden Mk. 9.80.
- IV. Band: **Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen.**  
Mit 89 Figuren. Preis broschiert Mk. 9.—, gebunden  
Mk. 9.80.

Dieses Werk dürfte wohl einzig in seiner Art dastehen, denn in so umfassender und gründlicher Weise ist die Stereometrie noch nicht behandelt worden. Das Wort „elementar“ ist dabei so zu nehmen, dass die höhere Analysis und im allgemeinen auch die analytische Raumgeometrie ausgeschlossen bleiben, während die synthetische neuere Geometrie in den Kreis der Betrachtungen hineingezogen wird, soweit es die Methoden der darstellenden Geometrie erfordern.

Alle Figuren, auf die ganz besondere Sorgfalt verwendet worden ist, sind streng konstruiert und fast jede ist ein Beispiel der darstellenden Geometrie.

Trotz des elementaren Charakters geht diese neue Stereometrie weit über das übliche Ziel hinaus, giebt neben den Lehrsätzen umfangreiches Übungsmaterial, betont die Konstruktion und die Berechnung gleichmässig und wird somit an Vielseitigkeit und Gedicgenheit des Inhalts wohl von keinem der hervorragenderen Lehrbücher erreicht.